SKOLIAD No. 96

Robert Bilinski

Please send your solutions to the problems in this edition by ***April 1, 2007***. A copy of MATHEMATICAL MAYHEM Vol. 6 will be presented to one pre-university reader who sends in solutions before the deadline. The decision of the editor is final.

Our items this issue come from the 2005 W.J. Blundon Mathematics Contest, for which I thank Don Rideout, Memorial University. I would also like to thank Bruce Shawyer, who recently retired from Memorial University; Bruce has been helping with ***CRUX with MAYHEM*** as a whole and with the Skoliad in particular for a long time.

22e Concours de Mathématiques W.J. Blundon
Commandité par la SMC et le département de mathématiques de l'Université Mémorial, 23 Février 2005

1. Une automobile monte une colline avec une vitesse moyenne de 30 km/h et descend la même distance avec une vitesse moyenne de 60 km/h. Quelle est la vitesse moyenne pour le trajet ?

2. Soit P un point à l'intérieur du rectangle $ABCD$. Si $PA = 9$, $PB = 4$ et $PC = 6$, trouver PD.

3. Trouver l'aire de la région au-dessus de l'axe des x et sous le graphique de $x^2 + (y + 1)^2 = 2$.

4. Un carré est inscrit dans un triangle équilateral. Trouver le ratio de l'aire du carré avec l'aire du triangle.

5. Trouver le nombre de solutions de l'équation $2x + 5y = 2005$ pour lesquelles x et y sont tous les deux des entiers positifs.

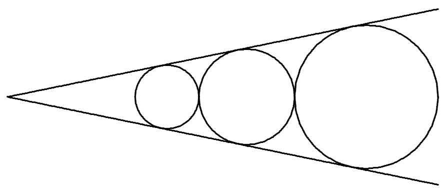
6. Pour quelles valeurs de a l'équation $4x^2 + 4ax + a + 6 = 0$ a des solutions réelles ?

7. Ace court avec une vitesse constante et Flash court x fois plus vite, $x > 1$. Flash donne Ace une longueur d'avance de y mètres, et, à un signal donné, ils partent dans la même direction. Trouver la distance que Flash doit courir pour rattraper Ace.

8. Montrer que $3^n - 2n - 1$ est divisible par 4 pour tout entier positif n.

9. Si le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ a les trois zéros a, b et c, trouver $a^3 + b^3 + c^3$.

10. Un cercle de rayon 2 est tangent aux deux côtés d'un angle. Un cercle de rayon 3 est tangent au premier cercle et aux deux côtés de l'angle. Un troisième cercle est tangent au second cercle et aux deux côtés de l'angle. Trouver le rayon du troisième cercle.



The 22nd W.J. Blundon Mathematics Contest
Sponsored by the CMS and the Mathematics Department at Memorial University, February 23, 2005

1. An automobile went up a hill at an average speed of 30 km/hr and down the same distance at an average speed of 60 km/hr. What was the average speed for the trip?

2. Let P be a point in the interior of rectangle $ABCD$. If $PA = 9$, $PB = 4$, and $PC = 6$, find PD.

3. Find the area of the region above the x–axis and below the graph of $x^2 + (y+1)^2 = 2$.

4. A square is inscribed in an equilateral triangle. Find the ratio of the area of the square to the area of the triangle.

5. Find the number of solutions to the equation $2x + 5y = 2005$ for which both x and y are positive integers.

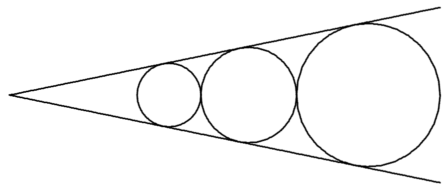
6. For what values of a does the equation $4x^2 + 4ax + a + 6 = 0$ have real solutions?

7. Ace runs with constant speed and Flash runs x times as fast, $x > 1$. Flash gives Ace a head start of y metres, and, at a given signal, they start off in the same direction. Find the distance Flash must run to catch Ace.

8. Show that $3^n - 2n - 1$ is divisible by 4 for any positive integer n.

9. If the polynomial $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ has the three zeroes a, b, and c, find $a^3 + b^3 + c^3$.

10. A circle of radius 2 is tangent to both sides of an angle. A circle of radius 3 is tangent to the first circle and both sides of the angle. A third circle is tangent to the second circle and both sides of the angle. Find the radius of the third circle.



Next we give the solutions to the 2003-04 Concours Montmorency for secondary 4 and 5 students in the Laval region of Quebec [2006 : 3–5].

Concours Montmorency 2003-04

Sec V, novembre 2003

1. Un magicien vous propose de calculer le carré de n'importe quel nombre entre 50 et 59 inclusivement.

Vous lui proposez de calculer 57^2.

Il répond : «Abracadabra : $5^2 = 25$ et $25 + 7 = 32$».

Il continue : «Abracadabra : $7^2 = 49$». (Rem : si le deuxième chiffre avait été 2, il aurait écrit $2^2 = 04$).

Il ajoute finalement : «Le carré est 3249».

Il a raison ! Justifiez-le algébriquement.

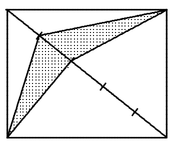
Solution officielle.

Soit u le chiffre des unités du nombre entre 50 et 59, autrement dit $(5u)_{10} = 50 + u$. Puisque l'on a

$$(50 + u)^2 \;=\; 2500 + 100u + u^2 \;=\; u^2 + 100(5^2 + u)\,,$$

la méthode du magicien est bonne.

2. Considérons un rectangle de largeur 8 et de longueur 10. En séparant la diagonale en cinq parties égales, calculer l'aire de la zone hachurée.



Solution officielle.

Si on relie toutes les marques de la diagonale avec les 2 sommets, on obtient 10 triangles ayant la même aire. En effet, les hauteurs sont égales par symétrie et les bases sont égales par construction. Ainsi, la zone hachurée est le cinquième du rectangle et son aire est $8 \times 10 \times \frac{1}{5} = 16$.

3. (a) Montrer que, pour toute paire de nombres réels $a > 0$ et $b > 0$, on a : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$.

(b) Déduire, grâce au résultat obtenu en (a), que pour $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$, on a toujours $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) > 8$.

Solution officielle.

(a) On part du fait que le carré de tout nombre est positif. Ainsi, en développant, $(a-b)^2 \geq 0$ est équivalent à $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Puisque a et b sont strictement positifs, on peut diviser par ab sans changer le sens de l'inégalité, d'où $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$.

(b) On développe le produit :

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \;=\; 3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \;\geq\; 9 \;>\; 8\,.$$

On utilise ainsi trois fois le résultat du (a).

4. On veut partager un terrain rectangulaire de 4000 m^2 à l'aide de deux lignes droites parallèles aux côtés, en quatre petits terrains rectangulaires A, B, C et D.

Est-il possible de le faire de telle manière que l'aire de $A = 2000$ m^2, l'aire de $B = 1000$ m^2, l'aire de $C = 600$ m^2 et l'aire de $D = 400$ m^2 ?

A	B
C	D

Solution officielle.

Non, pour qu'un tel partage soit réalisable, il faudrait que le rapport $\dfrac{\text{Aire de } A}{\text{Aire de } C}$ soit égal au rapport $\dfrac{\text{Aire de } B}{\text{Aire de } D}$. Or :

$$\frac{\text{Aire de } A}{\text{Aire de } C} = \frac{10}{3} \neq \frac{5}{2} = \frac{\text{Aire de } B}{\text{Aire de } D}\,.$$

5. Durant une panne d'électricité, deux chandelles de même longueur sont allumées à 18:00 h. La première chandelle se consume en 6 heures et la seconde, en 8 heures. À une certaine heure, on éteint les deux chandelles et on observe que la première est exactement deux fois plus courte que la seconde.

À quelle heure exactement, a-t-on éteint les deux chandelles ?

Solution officielle.

On pose ℓ la longueur des deux bougies. Les hauteurs h_1 et h_2 des deux chandelles sont obtenues par les équation suivantes :

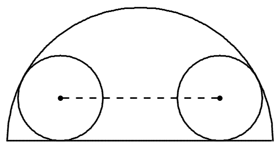
$$h_1 \;=\; \ell\left(1 - \frac{t}{6}\right) \qquad \text{et} \qquad h_2 \;=\; \ell\left(1 - \frac{t}{8}\right),$$

où t est le temps écoulé depuis 18:00 h. Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation $2h_1 = h_2$. En simplifiant les ℓ et en isolant le t, on obtient $t = \frac{24}{5}$.

On a donc éteint les bougies exactement 4 heures et 48 minutes après les avoir allumées. Les deux chandelles ont été éteintes à 22:48 h.

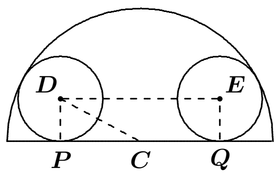
6. Two circles of radius 8 are placed inside a semi-circle of radius 25. The two circles are each tangent to the diameter and to the semicircle.

What is the distance between the centres of the two circles?



I. *Solution by Vedula N. Murty, Dover, PA, USA.*

Let C be the centre of the large semi-circle. Let D and E be the centres of the small circles, and let P and Q be their respective points of tangency with the diameter of the semi-circle (see diagram). Let a be the length of CP (which is also the length of CQ, by symmetry).

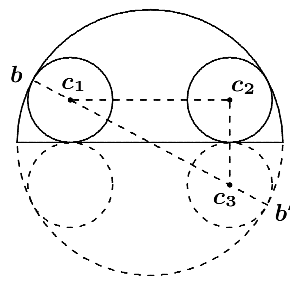


The distance between the centres of the two circles is the length of PQ, which equals $2a$. To find a, we note that the right triangle DPC has a hypotenuse of length $25 - 8 = 17$, with $DP = 8$ and $CP = a$. Using Pythagoras' Theorem, we easily see that $a = 15$.

Hence, the distance between the centres of the small circles is 30.

II. *Solution officielle.*

On commence par compléter le demi-cercle en lui juxtaposant son image miroir tel qu'illustré. Ensuite, on remarque que le segment bb' constitue un diamètre du grand cercle, sa longueur est donc 50. De plus, comme tous les petits cercles ont un rayon de longueur 8, on a que :



$$bc_1 \;=\; 8\,, \quad c_3b \;=\; 8\,, \quad c_2c_3 \;=\; 16\,, \quad c_1c_3 \;=\; 50 - 2\times 8 \;=\; 34\,.$$

Finalement, par Pythagore, on trouve que $\overline{c_1c_2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$.

7. Évaluer le très long produit suivant :

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2003^2}\right).$$

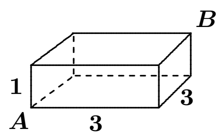
(Indice : $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n^2-1}{n^2}=\cdots$)

Solution officielle.

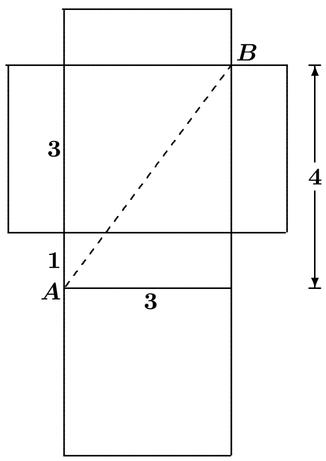
Premièrement on remarque que $1-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$. On peut alors réécrire le produit et simplifier :

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2003^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2004}{2003}=\frac{1002}{2003}.$$

8. Un parallélépipède rectangle a une base 3×3 et une hauteur 1. Trouver la longueur minimale d'un chemin qu'une araignée pourrait suivre, le long de la surface, pour se rendre du sommet A au sommet opposé B.



Solution officielle.



Il suffit ensuite d'appliquer Pythagore pour obtenir la longueur recherchée : $\sqrt{3^2+4^2}=5$.

That brings us to the end of another issue. Continue sending in your contests and solutions.