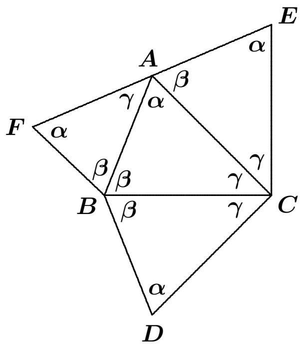
Mayhem Problems

Please send your solutions to the problems in this edition by **1 January 2007**. *Solutions received after this date will only be considered if there is time before publication of the solutions.*

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, and 7, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, and 8, French will precede English.

The editor thanks Jean-Marc Terrier and Martin Goldstein of the University of Montreal for translations of the problems.

M251. *Proposed by K.R.S. Sastry, Bangalore, India.*



Let α, β, γ be the angle measures at angles A, B, C, respectively, in $\triangle ABC$. On the sides of $\triangle ABC$, externally, are triangles DBC, EAC, and FBA as in the diagram.

Prove that $AD = EF$ if and only if $\alpha = \pi/2$.

M252. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Let x, y, z be positive real numbers. Prove that

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2+\left(\frac{y}{z}+\frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2+\left(\frac{z}{x}+\frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2 \;\geq\; 12\,.$$

M253. *Proposed by Fabio Zucca, Politecnico di Milano, Milano, Italy.*

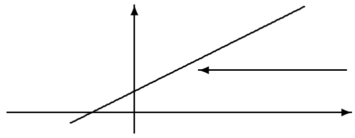
Consider the set of lattice points $\{(x,y)\}$ where x and y are integers such that $0 \leq x \leq 7$ and $0 \leq y \leq 7$. Two points are selected at random from this set. All points have the same probability of being selected and the points need not be distinct. Find the probability that the area of the triangle (possibly degenerate) formed by these two points and the point $(0,0)$ is an integer (possibly 0).

M254. *Proposed by Edward T.H. Wang, Wilfrid Laurier University, Waterloo, ON.*

Evaluate the summation $S_{2006} = \sum\limits_{k=1}^{2006}(-1)^k\frac{k^2-3}{(k+1)!}$. [Recall that $n! = n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$; for example, $6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$.]

M255. *Proposed by Bruce Shawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

The line with slope $\lambda > 0$ acts like a mirror to a ray of light coming along a line parallel to the x–axis. Determine the slope of the reflected ray.



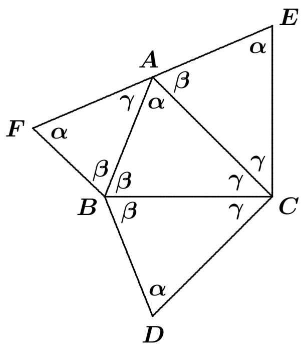
M256. *Proposed by the Mayhem Staff.*

Find a quadratic polynomial $f(x)$ such that, if n is a positive integer consisting of the digit 5 repeated k times, then $f(n)$ consists of the digit 5 repeated $2k$ times. (For example, $f(555) = 555555$.)

M251. *Proposé par K.R.S. Sastry, Bangalore, Inde.*

Soit α, β et γ les mesures respectives des angles A, B et C dans le triangle ABC. Sur les côtés du triangle ABC, on construit extérieurement les triangles DBC, EAC et FBA, comme indiqué dans la figure.

Montrer que $AD = EF$ si et seulement si $\alpha = \pi/2$.



M252. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Soit x, y et z trois nombres réels positifs. Montrer que

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} + \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^2 \geq 12\,.$$

M253. *Proposé par Fabio Zucca, Politecnico di Milano, Milano, L'italie.*

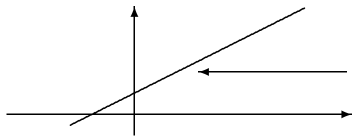
On considère l'ensemble des points $\{(x,y)\}$ d'un réseau où x et y sont des entiers tels que $0 \leq x \leq 7$ et $0 \leq y \leq 7$. On choisit deux points de cet ensemble au hasard. Tous les points ont la même probabilité d'être choisis et les points peuvent ne pas être distincts. Trouver la probabilité pour que l'aire du triangle (peut-être dégénéré) formé par ces points et le point $(0,0)$ soit un entier (peut-être 0).

M254. *Proposé par Edward T.H. Wang, Université Wilfrid Laurier, Waterloo, ON.*

Evaluer la somme $S_{2006} = \sum_{k=1}^{2006} (-1)^k \frac{k^2-3}{(k+1)!}$. [On rappelle que $n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$; par exemple, $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.]

M255. *Proposé par Bruce Shawyer, Université Memorial de Terre-Neuve, St. John's, NL.*

Une droite de pente $\lambda > 0$ agit comme un miroir sur un rayon lumineux suivant une droite parallèle à l'axes des x. Déterminer la pente du rayon réfléchi.



M256. *Proposé par l'Équipe de Mayhem.*

Trouver un polynôme quadratique $f(x)$ tel que, si n est un entier positif formé du chiffre 5 répété k fois, alors $f(n)$ est formé du chiffre 5 répété $2k$ fois. (Par exemple, $f(555) = 555555$.)