PROBLEMS

Solutions to problems in this issue should arrive no later than **1 March 2007**. *An asterisk* ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, and 7, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, and 8, French will precede English. In the solutions section, the problem will be stated in the language of the primary featured solution.

The editor thanks Jean-Marc Terrier and Martin Goldstein of the University of Montreal for translations of the problems.

Problem 3149 [2006 : 240, 242] was the same problem as 3073 [2005 : 399, 401]. We are replacing 3149 in this issue. Any solutions for the original 3149 will be treated as solutions to 3073.

3126. Correction. *Proposed by Hidetoshi Fukugawa, Kani, Gifu, Japan.*

Let D be any point on the side BC of triangle ABC. Let Γ_1 and Γ_2 be the incircles of $\triangle ABD$ and $\triangle ACD$, respectively. Let ℓ be the common external tangent to Γ_1 and Γ_2 which is different from BC. If P is the point of intersection of AD and ℓ, show that $2AP = AB + AC - BC$.

3135. Correction. *Proposed by Marian Marinescu, Monbonnot, France.*

Let $\mathbb{R}^+$ be the set of non-negative real numbers. For all a, b, $c \in \mathbb{R}^+$, let $H(a,b,c)$ be the set of all functions $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ such that

$$h(x) \;=\; h\big(h(ax)\big) + h(bx) + cx$$

for all $x \in \mathbb{R}^+$. Prove that $H(a,b,c)$ is non-empty if and only if $b \leq 1$ and $4ac \leq (1-b)^2$.

3149. Replacement. *Proposed by David Martinez Ramirez, student, Universidad Nacional Autonoma de Mexico, Mexico.*

Let $P(z)$ be any non-constant complex monic polynomial. Show that there is a complex number w such that $|w| \leq 1$ and $|P(w)| \geq 1$.

3150. Correction. *Proposed by Zhang Yun, High School attached to Xi′ An Jiao Tong University, Xi′ An City, Shan Xi, China.*

Let a, b, c be the three sides of a triangle, and let h_a, h_b, h_c be the altitudes to the sides a, b, c, respectively. Prove that

$$\frac{h_a^2}{b^2+c^2} \cdot \frac{h_b^2}{c^2+a^2} \cdot \frac{h_c^2}{a^2+b^2} \;\leq\; \left(\frac{3}{8}\right)^3 .$$

3151. *Proposed by Mª Jesús Villar Rubio, Santander, Spain.*

(a) Let $r_1 < 0 < r_2 < r_3$ be the real roots of $8x^3 - 6x + \sqrt{3} = 0$. Prove that

$$r_3^2 \;=\; 4r_2^2 - 4r_2^4 \qquad \text{and} \qquad r_1^2 \;=\; 4r_3^2 - 4r_3^4\,.$$

(b) Let $s_1 < 0 < s_2 < s_3$ be the real roots of $8x^3 - 6x + 1 = 0$. Prove that

$$r_1^2 + s_2^2 \;=\; 1\,, \qquad s_1^2 + r_2^2 \;=\; 1\,, \qquad \text{and} \qquad r_3^2 + s_3^2 \;=\; 1\,.$$

3152. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \geq 2)$ be real numbers such that $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$ and $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Find the minimum and maximum of $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

3153. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

For which integers n does the equation

$$\frac{3xy - 1}{x + y} \;=\; n$$

have a solution in integers x and y?

3154. *Proposed by Challa K.S.N.M. Sankar, Andhrapradesh, India.*

(a) If $\beta > 1$ is a real constant, determine the number of possible real solutions of the equation

$$x - \beta \log_2 x \;=\; \beta - \beta \ln \beta\,.$$

(b) If $\alpha_1 < \alpha_2$ are two positive real solutions of the equation in (a), and if x_1 and x_2 are any two real numbers satisfying $\alpha_1 \leq x_1 < x_2 \leq \alpha_2$, prove that, for all λ such that $0 < \lambda < 1$,

$$\lambda \log_2 x_1 + (1 - \lambda) \log_2 x_2 \;\geq\; \ln\bigl(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2\bigr)\,.$$

Determine when equality occurs.

3155. *Proposed by Virgil Nicula, Bucharest, Romania.*

In $\triangle ABC$, let D, E, F be the intersections of the altitudes from A, B, C to the sides BC, CA, AB, respectively. Let H be the orthocentre of $\triangle ABC$, let L be the intersection of AT and the line through B perpendicular to BC, and let T be the intersection of BE and DF.

Show that $BL = BC$ if and only if $\angle ACB = 45^\circ$.

3156. *Proposed by Virgil Nicula, Bucharest, Romania.*

Let Γ be the circumcircle of $\triangle ABC$. Let M be an interior point on the side AB, and let N be an interior point on the side AC. Let D be an intersection point of MN with Γ. Prove that

$$\left|\frac{MB}{MA}\cdot\frac{AC}{DB}-\frac{NC}{NA}\cdot\frac{AB}{DC}\right| \;=\; \frac{BC}{DA}\,.$$

3157. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let p be a fixed odd prime number. Let $\alpha(n)$ denote the largest integer k such that p^k is an integral divisor of $1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdots n^n$. Prove that

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(n)}{n^2} \;=\; \frac{1}{2(p-1)}\,.$$

3158. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let $E=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid x+y \text{ is a perfect square}\}$, and let $N(n)$ be the size of the set $\{(x,y)\in E\mid x\le n \text{ and } y\le n\}$, for $n\in\mathbb{N}$. Prove that

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n\sqrt{n}} \;=\; \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)\,.$$

3159. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let n be a positive integer, and let γ be Euler's constant. Prove that

$$\gamma-\frac{1}{48n^3} \;<\; 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{24n}\right) \;<\; \gamma-\frac{1}{48(n+1)^3}\,.$$

3160. *Proposed by D.J. Smeenk, Zaltbommel, the Netherlands.*

Let $\triangle ABC$ have altitude AD and orthocentre H. Let E be the mid-point of AD and M the mid-point of BC.

(a) If $AD=BC$, prove that $HM=HE$.

(b) Is the converse of (a) true?

3161. *Proposed by D.J. Smeenk, Zaltbommel, the Netherlands.*

Let D be a point on the side BC of $\triangle ABC$, and let P be an arbitrary point on the segment AD. Let BP meet AC at E and CP meet AB at F.

(a) If $AD\perp BC$, prove that $\angle BDF=\angle CDE$.

(b) Is the converse of (a) true?

3162. *Proposed by Eckard Specht, Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany.*

Determine all integer solutions (x, y) of the equation

$$x^5 + y^7 \ = \ 2004^{1007} .$$

. . . .

3126. Correction. *Proposé par Hidetoshi Fukugawa, Kani, Gifu, Japon.*

Soit D un point sur le côté BC du triangle ABC. Soit respectivement Γ_1 et Γ_2 les cercles inscrits des triangles ABD et ACD. Soit ℓ la tangente extérieure commune à Γ_1 et Γ_2 et distincte de BC. Si P est le point d'intersection de AD et ℓ, montrer que $2AP = AB + AC - BC$.

3135. Correction. *Proposé par Marian Marinescu, Monbonnot, France.*

Soit $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels non négatifs. Pour tout a, b et $c \in \mathbb{R}^+$, soit $H(a,b,c)$ l'ensemble de toutes les fonctions $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que

$$h(x) \ = \ h\big(h(ax)\big) + h(bx) + cx$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $H(a,b,c)$ est non vide si et seulement si $b \le 1$ et $4ac \le (1-b)^2$.

3149. Remplacement. *Proposé par David Martinez Ramirez, étudiant, Universidad Nacional Autonoma de Mexico, Mexique.*

Soit $P(z)$ un polynôme complexe non constant et unitaire. Montrer qu'il existe un nombre complexe w tel que $|w| \le 1$ et $|P(w)| \ge 1$.

3150. Correction. *Proposé par Zhang Yun, High School attached to Xi′ An Jiao Tong University, Xi′ An City, Shan Xi, Chine.*

Soit a, b et c les trois côtés d'un triangle, et soit h_a, h_b et h_c les hauteurs abaissées sur les côtés respectifs a, b et c. Montrer que

$$\frac{h_a^2}{b^2+c^2} \cdot \frac{h_b^2}{c^2+a^2} \cdot \frac{h_c^2}{a^2+b^2} \ \le \ \left(\frac{3}{8}\right)^3 .$$

3151. *Proposé par Mª Jesús Villar Rubio, Santander, Espagne.*

(a) Soit $r_1 < 0 < r_2 < r_3$ les racines réelles de $8x^3 - 6x + \sqrt{3} = 0$. Montrer que

$$r_3^2 \ = \ 4r_2^2 - 4r_2^4 \qquad \text{et} \qquad r_1^2 \ = \ 4r_3^2 - 4r_3^4 .$$

(b) Soit $s_1 < 0 < s_2 < s_3$ les racines réelles de $8x^3 - 6x + 1 = 0$. Montrer que

$$r_1^2 + s_2^2 \ = \ 1 , \qquad s_1^2 + r_2^2 \ = \ 1 , \qquad \text{et} \qquad r_3^2 + s_3^2 \ = \ 1 .$$

3152. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit x_1, x_2, $\ldots$, x_n ($n \geq 2$) des nombres réels tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Trouver le minimum et le maximum de $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

3153. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Pour quels entiers n l'équation

$$\frac{3xy - 1}{x + y} \;=\; n$$

a-t-elle des solutions entières x et y ?

3154. *Proposé par Challa K.S.N.M. Sankar, Andhrapradesh, Inde.*

(a) Si $\beta > 1$ est une constante réelle, déterminer le nombre possible de solutions réelles de l'équation

$$x - \beta \log_2 x \;=\; \beta - \beta \ln \beta\,.$$

(b) Si $\alpha_1 < \alpha_2$ sont deux solutions réelles de l'équation en (a), et si x_1 et x_2 sont deux nombres réels quelconques satisfaisant $\alpha_1 \leq x_1 < x_2 \leq \alpha_2$, montrer que, pour tout λ tel que $0 < \lambda < 1$,

$$\lambda \log_2 x_1 + (1 - \lambda) \log_2 x_2 \;\geq\; \ln\big(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2\big)\,.$$

Déterminer quand l'égalité a lieu.

3155. *Proposé par Virgil Nicula, Bucarest, Roumanie.*

Dans le triangle ABC, soit D, E et F les intersections respectives des hauteurs A, B et C avec les côtés BC, CA et AB. Soit H l'orthocentre de ABC, soit T l'intersection de BE et DF, et soit L l'intersection de AT avec la droite passant par B et perpendiculaire à BC.

Montrer que $BL = BC$ si et seulement l'angle $ACB = 45^\circ$.

3156. *Proposé par Virgil Nicula, Bucarest, Roumanie.*

Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC, M un point intérieur du côté AB et N un point intérieur du côté AC. Si D désigne une intersection de MN avec Γ, montrer que

$$\left| \frac{MB}{MA} \cdot \frac{AC}{DB} - \frac{NC}{NA} \cdot \frac{AB}{DC} \right| \;=\; \frac{BC}{DA}\,.$$

3157. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit p un nombre premier impair donné. On désigne par $\alpha(n)$ le plus grand entier k tel que p^k est un diviseur entier de $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{n^2} = \frac{1}{2(p-1)} .$$

3158. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x+y \text{ est un carré parfait}\}$, et soit $N(n)$ la taille de l'ensemble $\{(x,y) \in E \mid x \leq n \text{ et } y \leq n\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n\sqrt{n}} = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1) .$$

3159. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit n un entier positif et γ la constante d'Euler. Montrer que

$$\gamma - \frac{1}{48n^3} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{24n}\right) < \gamma - \frac{1}{48(n+1)^3} .$$

3160. *Proposé par D.J. Smeenk, Zaltbommel, Pays-Bas.*

Dans un triangle ABC d'orthocentre H, soit AD la hauteur issue du sommet A. Soit E le point milieu de AD et M celui de BC.

(a) Si $AD = BC$, montrer que $HM = HE$.

(b) Est-ce que la réciproque de (a) est vraie ?

3161. *Proposé par D.J. Smeenk, Zaltbommel, Pays-Bas.*

Soit D un point du côté BC du triangle ABC, et soit P un point arbitraire du segment AD. Soit E et F les intersections respectives de BP avec AC et de CP avec AB.

(a) Si AD est perpendiculaire à BC, montrer que les angles BDF et CDE sont égaux.

(b) Est-ce que la réciproque de (a) est vraie ?

3162. *Proposé par Eckard Specht, Université Otto-von-Guericke, Magdeburg, Allemagne.*

Déterminer toutes les solutions entières (x,y) de l'équation

$$x^5 + y^7 = 2004^{1007} .$$