PROBLEMS

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1er décembre 2006**. *Une étoile* ($\star$) *après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier et Martin Goldstein, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

3139. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit ε l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$. Deux parallèles, tangentes à ε, coupent une troisième tangente en $M_1(x_1,y_1)$ et $M_2(x_2,y_2)$. Montrer que la valeur de

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}-1\right)$$

est indépendante des tangentes choisies.

3140. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit a_1, a_2, $\dots$, a_n n nombres réels positifs distincts, où $n \geq 2$. Pour $i=1, 2, \dots, n$, soit $p_i = \prod\limits_{j\neq i}(a_j-a_i)$. Montrer que $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{p_i}} < 1$.

3141. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Soit a, b et c les côtés d'un triangle scalène ABC. Montrer que

$$\sum_{\text{cyclique}} \frac{(a+1)bc}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{c})} \;<\; \frac{a^4+b^4+c^4}{abc}\,.$$

3142. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Si $x_k > 0$ pour $k=1, 2, \dots, n$, montrer que

(a) $\cos\left(\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}\right) - \sin\left(\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}\right) \;\geq\; \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{1}{x_k}-\sin\frac{1}{x_k}\right);$

(b) $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{x_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{1}{x_k}} \;\geq\; \tan\left(\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}\right).$

3143. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit $a_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}$, où $n \geq 1$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[k]{k}}{a_k^2} \;<\; \frac{2n+1+(\ln n)^2}{n+1+\frac{1}{2}(\ln n)^2}\,.$$

3144. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit A, $B \in M_n(\mathbb{C})$, et soit $\omega = e^{2\pi/n}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \det(A + \omega^{k-1}B) + \sum_{k=1}^{n} \det(B + \omega^{k-1}A) \;=\; 2n(\det A + \det B)\,.$$

3145★. *Proposé par Yuming Chen, Université Wilfrid Laurier, Waterloo, ON.*

Soit $f(x) = x - c^2\tanh(x)$, où $c > 1$ est une constante arbitraire. Il n'est pas difficile de montrer que f est décroissante sur l'intervalle $[-x_0, x_0]$, où $x_0 = \ln\bigl(c + \sqrt{c^2-1}\bigr)$ est la racine positive de l'équation $\cosh x = c$. Pour tout $x \in (-x_0, x_0)$, la droite horizontale passant par $\bigl(x, f(x)\bigr)$ coupe le graphe de f en deux autres points d'abscisse $x_1(x)$ et $x_2(x)$. On définit une fonction $g : (-x_0, x_0) \to \mathbb{R}$ par :

$$g(x) \;=\; x + c^2\tanh\bigl(x_1(x)\bigr) + c^2\tanh\bigl(x_2(x)\bigr)\,.$$

Montrer si oui ou non, $g(x) > 0$ pour tout $x \in (0, x_0)$.

3146. *Proposé par Vasile Cîrtoaje, Université de Ploiesti, Roumanie.*

Soit $p > 1$, et soit a, b, c, $d \in \bigl[1/\sqrt{p}, \sqrt{p}\bigr]$. Montrer que

(a) $\displaystyle \frac{p}{1+p} + \frac{2}{1+\sqrt{p}} \;\leq\; \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \;\leq\; \frac{1}{1+p} + \frac{2\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}\,;$

(b) $\displaystyle \frac{p}{1+p} + \frac{3}{1+\sqrt[3]{p}} \;\leq\; \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a} \;\leq\; \frac{1}{1+p} + \frac{3\sqrt[3]{p}}{1+\sqrt[3]{p}}.$

3147. *Proposé par Vasile Cîrtoaje, Université de Ploiesti, Roumanie, et Gabriel Dospinescu, Paris, France.*

Soit $n \geq 3$, et soit x_1, x_2, $\ldots$, x_n des nombres réels positifs tels que $x_1x_2\cdots x_n = 1$. Pour $n = 3$ et $n = 4$, montrer que

$$\frac{1}{x_1^2 + x_1x_2} + \frac{1}{x_2^2 + x_2x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n^2 + x_nx_1} \;\geq\; \frac{n}{2}\,.$$

3148. *Proposé par Vasile Cîrtoaje, Université de Ploiesti, Roumanie.*

Soit $0 < m < 1$, et soit a, b, $c \in \left[\sqrt{m}, 1/\sqrt{m}\right]$. Montrer que

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3(1+m)abc}{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)} \;\geq\; 1 + \frac{m}{2}\,.$$

3149. *Proposé par Zhang Yun, High School attached to Xi′ An Jiao Tong University, Xi′ An City, Shan Xi, Chine.*

Soit x, y et z trois entiers positifs. Montrer que

$$\frac{1}{x+y+z+1} - \frac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)} \;\leq\; \frac{1}{8}\,.$$

3150. *Proposé par Zhang Yun, High School attached to Xi′ An Jiao Tong University, Xi′ An City, Shan Xi, Chine.*

Soit a, b et c les trois côtés d'un triangle, et soit h_a, h_b et h_c les hauteurs abaissées sur les côtés respectifs a, b et c. Montrer que

$$\frac{h_a^2}{b^2+c^2} \cdot \frac{h_b^2}{c^2+a^2} \cdot \frac{h_c^2}{a^2+b^2} \;\leq\; \left(\frac{3}{8}\right)^2\,.$$

....

3139. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let ε be the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Two parallel tangents to ε intersect a third tangent at $M_1(x_1, y_1)$ and $M_2(x_2, y_2)$. Show that the value of

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - 1\right)$$

is independent of the chosen tangents.

3140. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let a_1, a_2, $\dots$, a_n be n distinct positive real numbers, where $n \geq 2$. For $i = 1, 2, \dots, n$, let $p_i = \prod_{j \neq i} (a_j - a_i)$. Show that $\prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{p_i}} < 1$.

3141. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Let a, b, and c be the sides of a scalene triangle ABC. Prove that

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{(a+1)bc}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{c}\right)} \;<\; \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}\,.$$

3142. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

If $x_k > 0$ for $k = 1, 2, \ldots, n$, prove that

(a) $$\cos\left(\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} x_k}\right) - \sin\left(\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} x_k}\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{1}{x_k} - \sin\frac{1}{x_k}\right);$$

(b) $$\frac{\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{1}{x_k}}{\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{1}{x_k}} \geq \tan\left(\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} x_k}\right).$$

3143. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

For $n \geq 1$ let $a_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}$. Prove that

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[k]{k}}{a_k^2} < \frac{2n + 1 + (\ln n)^2}{n + 1 + \frac{1}{2}(\ln n)^2}.$$

3144. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let A, $B \in M_n(\mathbb{C})$, and let $\omega = e^{2\pi/n}$. Prove that

$$\sum_{k=1}^{n} \det(A + \omega^{k-1}B) + \sum_{k=1}^{n} \det(B + \omega^{k-1}A) = 2n(\det A + \det B).$$

3145★. *Proposed by Yuming Chen, Wilfrid Laurier University, Waterloo, ON.*

Let $f(x) = x - c^2 \tanh x$, where $c > 1$ is an arbitrary constant. It is not hard to show that $f(x)$ is decreasing on the interval $[-x_0, x_0]$, where $x_0 = \ln\left(c + \sqrt{c^2 - 1}\right)$ is the positive root of the equation $\cosh x = c$. For each $x \in (-x_0, x_0)$, the horizontal line passing through $\left(x, f(x)\right)$ intersects the graph of f at two other points with abscissas $x_1(x)$ and $x_2(x)$. Define a function $g : (-x_0, x_0) \to \mathbb{R}$ as follows:

$$g(x) = x + c^2 \tanh\left(x_1(x)\right) + c^2 \tanh\left(x_2(x)\right).$$

Prove or disprove that $g(x) > 0$ for all $x \in (0, x_0)$.

3146. *Proposed by Vasile Cîrtoaje, University of Ploiesti, Romania.*

Let $p > 1$, and let $a, b, c, d \in \left[1/\sqrt{p}, \sqrt{p}\right]$. Prove that

(a) $$\frac{p}{1+p}+\frac{2}{1+\sqrt{p}} \le \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a} \le \frac{1}{1+p}+\frac{2\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}};$$

(b) $$\frac{p}{1+p}+\frac{3}{1+\sqrt[3]{p}} \le \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a} \le \frac{1}{1+p}+\frac{3\sqrt[3]{p}}{1+\sqrt[3]{p}}.$$

3147. *Proposed by Vasile Cîrtoaje, University of Ploiesti, Romania; and Gabriel Dospinescu, Paris, France.*

Let $n \ge 3$, and let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be positive real numbers such that $x_1x_2\cdots x_n = 1$. For $n = 3$ and $n = 4$, prove that

$$\frac{1}{x_1^2+x_1x_2}+\frac{1}{x_2^2+x_2x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n^2+x_nx_1} \ge \frac{n}{2}.$$

3148. *Proposed by Vasile Cîrtoaje, University of Ploiesti, Romania.*

Let $0 < m < 1$, and let $a, b, c \in \left[\sqrt{m}, 1/\sqrt{m}\right]$. Prove that

$$\frac{a^3+b^3+c^3+3(1+m)abc}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)} \ge 1+\frac{m}{2}.$$

3149. *Proposed by Zhang Yun, High School attached to Xi′ An Jiao Tong University, Xi′ An City, Shan Xi, China.*

Let x, y, z be positive integers. Prove that

$$\frac{1}{x+y+z+1}-\frac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)} \le \frac{1}{8}.$$

3150. *Proposed by Zhang Yun, High School attached to Xi′ An Jiao Tong University, Xi′ An City, Shan Xi, China.*

Let a, b, c be the three sides of a triangle, and let h_a, h_b, h_c be the altitudes to the sides a, b, c, respectively. Prove that

$$\frac{h_a^2}{b^2+c^2}\cdot\frac{h_b^2}{c^2+a^2}\cdot\frac{h_c^2}{a^2+b^2} \le \left(\frac{3}{8}\right)^2.$$