PROBLEMS

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1er avril 2006**. *Une étoile ($\star$) après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier et Martin Goldstein, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

3064. *Proposé par J. Chris Fisher, Université de Regina, Regina, SK.*

(a) Soit A, B, C et D les sommets d'un quadrilatère. Soit P, Q, R et S les points milieu respectifs de AB, CD, AC et BD. Soit L le point d'intersection de AQ et DP et M celui de BR et CS. Montrer que le point milieu de BC est situé sur la droite LM si et seulement si $AD \parallel BC$.

(b) Soit A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 les sommets d'un pentagone non dégénéré. On appelle *médian* une droite joignant un sommet A_j soit au milieu du côté opposé $A_{j+2}A_{j-2}$ soit au milieu de la diagonale opposée $A_{j+1}A_{j-1}$ (les indices étant pris modulo 5). Montrer que le pentagone est affinement régulier si et seulement si les dix médians sont concourants.

Le résultat s'appuie sur un théorème de Zvonco Čerin, *Journal of Geometry*, **77** (2003), 22–34.

Note : On dit qu'un pentagone est *affinement régulier* s'il est l'image par une transformation linéaire d'un pentagone régulier ou d'un pentagramme régulier.

3065. *Proposé par Gabriel Dospinescu, Onesti, Roumanie.*

Soit ABC un triangle acutangle, et soit M un point intérieur de ce triangle. Montrer que

$$\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC} \;\geq\; 2\left(\frac{\sin\angle AMB}{AB}+\frac{\sin\angle BMC}{BC}+\frac{\sin\angle CMA}{CA}\right) .$$

3066. *Proposé par Gabriel Dospinescu, Onesti, Roumanie.*

Un entier $n > 2$ étant donné, soit A_1, A_2, $\dots$, A_n et B_1, B_2, $\dots$, B_n des sous-ensembles de $S = \{1, 2, \dots, n\}$ avec la propriété que pour tout i, $j \in S$, les sous-ensembles A_i et B_j ont exactement un élément en commun. Montrer que s'il y a au moins deux sous-ensembles distincts parmi B_1, B_2, $\dots$, B_n, alors il existe un sous-ensemble non vide $T \subseteq S$ ayant un nombre pair d'éléments en commun avec chacun des sous-ensembles A_1, A_2, $\dots$, A_n.

3067. *Proposé par Gabriel Dospinescu, Onesti, Roumanie.*

Trouver toutes les fonctions $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ telles que

1. $f\big(f(f(x))\big) + 2x = f(3x)$ pour tout $x > 0$, et
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \big(f(x) - x\big) = 0$.

3068. *Proposé par Vasile Cîrtoaje, Université de Ploiesti, Roumanie.*

Soit a, b et c trois nombres réels non négatifs dont deux au moins sont non nuls. Montrer que

$$\sqrt{1 + \frac{48a}{b+c}} + \sqrt{1 + \frac{48b}{c+a}} + \sqrt{1 + \frac{48c}{a+b}} \ \geq\ 15\,,$$

et déterminer quand il y a égalité.

3069. *Proposé par Cristinel Mortici, Valahia Université de Targoviste, Roumanie.*

Soit A et $B \in M_2(\mathbb{C})$ telles que $(AB)^2 = A^2B^2$. Montrer que

$$\det(I + AB - BA) \ =\ 1\,.$$

3070. *Proposé par Zhang Yun, High School attached to Xi′ An Jiao Tong University, Xi′ An City, Shan Xi, Chine.*

Soit x_1, x_2, ..., x_n des nombres réels positifs tels que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \ \geq\ x_1 x_2 \cdots x_n\,.$$

Montrer que

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{-1} \left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \cdots + x_n^{n-1}\right) \ \geq\ \sqrt[n-1]{n^{n-2}}\,,$$

et déterminer quand il y a égalité.

3071. *Proposé par Arkady Alt, San Jose, CA, USA.*

Soit $k > -1$ un nombre réel donné. Soit a, b et c des nombres réels non négatifs tels que $a + b + c = 1$ et $ab + bc + ca > 0$. Trouver

$$\min \left\{ \frac{(1+ka)(1+kb)(1+kc)}{(1-a)(1-b)(1-c)} \right\}\,.$$

3072. *Proposé par Mohammed Aassila, Strasbourg, France.*

Trouver la plus petite constante k telle que, pour tous nombres réels positifs a, b et c, on ait

$$abc\left(a^{125} + b^{125} + c^{125}\right)^{16} \ \leq\ k\left(a^{2003} + b^{2003} + c^{2003}\right)\,.$$

3073. *Proposé par Zhang Yun, High School attached to Xi′ An Jiao Tong University, Xi′ An City, Shan Xi, Chine.*

Soit x, y et z trois nombres réels positifs. Montrer que

$$\frac{1}{x+y+z+1}-\frac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)} \;\le\; \frac{1}{8}\,,$$

et déterminer quand il y a égalité.

3074. *Proposé par Cristinel Mortici, Valahia Université de Targoviste, Roumanie.*

Soit $f:\left[0,\frac{1}{2005}\right]\to\mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f\left(x+y^2\right) \;\ge\; y+f(x)\,,$$

pour tous les x et y réels avec $x\in\left[0,\frac{1}{2005}\right]$ et $x+y^2\in\left[0,\frac{1}{2005}\right]$? Donner un exemple d'une telle function, ou montrer qu'il n'en existe pas.

3075. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Résoudre l'équation suivante, où x est un nombre réel positif :

$$\left(8^x-5^x\right)\left(7^x-2^x\right)\left(6^x-4^x\right)+\left(9^x-4^x\right)\left(8^x-3^x\right)\left(5^x-2^x\right) \;=\; 105^x\,.$$

. . . .

3064. *Proposed by J. Chris Fisher, University of Regina, Regina, SK.*

(a) Starting with four points A, B, C, D in the plane, no three of which are collinear, let P, Q, R, S be the mid-points of AB, CD, AC, BD, respectively. Let L be the point of intersection of AQ and DP, and let M be the point of intersection of BR and CS. Prove that the mid-point of BC lies on the line LM if and only if $AD \parallel BC$.

(b) Let A_0, A_1, A_2, A_3, and A_4 be the vertices of a non-degenerate pentagon. Define a *median* to be a line that joins a vertex A_j either to the mid-point of the opposite side $A_{j+2}A_{j-2}$ or to the mid-point of the opposite diagonal $A_{j+1}A_{j-1}$ (where subscripts are taken modulo 5). Prove that the pentagon is affinely regular if and only if the ten medians are concurrent.

The result is based on a theorem of Zvonco Čerin, *Journal of Geometry*, 77 (2003), 22–34.

Note: A pentagon is said to be *affinely regular* if it is the image under a linear transformation of a regular pentagon or a regular pentagram.

3065. *Proposed by Gabriel Dospinescu, Onesti, Romania.*

Let ABC be an acute-angled triangle, and let M be an interior point of the triangle. Prove that

$$\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC} \;\ge\; 2\left(\frac{\sin\angle AMB}{AB}+\frac{\sin\angle BMC}{BC}+\frac{\sin\angle CMA}{CA}\right)\,.$$

3066. *Proposed by Gabriel Dospinescu, Onesti, Romania.*

Given an integer $n > 2$, let $A_1, A_2, \ldots, A_n$ and $B_1, B_2, \ldots, B_n$ be subsets of $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ with the property that for all $i, j \in S$, the subsets A_i and B_j have exactly one element in common. Prove that, if there are at least two distinct subsets among $B_1, B_2, \ldots, B_n$, then there exists a non-empty subset $T \subseteq S$ that has an even number of elements in common with each of the subsets $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

3067. *Proposed by Gabriel Dospinescu, Onesti, Romania.*

Find all functions $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ such that

1. $f\big(f(f(x))\big) + 2x = f(3x)$ for all $x > 0$, and
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \big(f(x) - x\big) = 0$.

3068. *Proposed by Vasile Cîrtoaje, University of Ploiesti, Romania.*

Let a, b, c be non-negative real numbers, no two of which are zero. Prove that

$$\sqrt{1 + \frac{48a}{b+c}} + \sqrt{1 + \frac{48b}{c+a}} + \sqrt{1 + \frac{48c}{a+b}} \;\geq\; 15\,,$$

and determine when there is equality.

3069. *Proposed by Cristinel Mortici, Valahia University of Targoviste, Romania.*

Let $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ be such that $(AB)^2 = A^2B^2$. Prove that

$$\det(I + AB - BA) \;=\; 1\,.$$

3070. *Proposed by Zhang Yun, High School attached to Xi′ An Jiao Tong University, Xi′ An City, Shan Xi, China.*

Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be positive real numbers such that

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \;\geq\; x_1x_2\cdots x_n\,.$$

Prove that

$$(x_1x_2\cdots x_n)^{-1}\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \cdots + x_n^{n-1}\right) \;\geq\; \sqrt[n-1]{n^{n-2}}\,,$$

and determine when there is equality.

3071. *Proposed by Arkady Alt, San Jose, CA, USA.*

Let $k > -1$ be a fixed real number. Let a, b, and c be non-negative real numbers such that $a + b + c = 1$ and $ab + bc + ca > 0$. Find

$$\min\left\{\frac{(1+ka)(1+kb)(1+kc)}{(1-a)(1-b)(1-c)}\right\}\,.$$

3072. *Proposed by Mohammed Aassila, Strasbourg, France.*

Find the smallest constant k such that, for any positive real numbers a, b, c, we have

$$abc\left(a^{125}+b^{125}+c^{125}\right)^{16} \;\leq\; k\left(a^{2003}+b^{2003}+c^{2003}\right) .$$

3073. *Proposed by Zhang Yun, High School attached to Xi′ An Jiao Tong University, Xi′ An City, Shan Xi, China.*

Let x, y, z be positive real numbers. Prove that

$$\frac{1}{x+y+z+1}-\frac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)} \;\leq\; \frac{1}{8},$$

and determine when there is equality.

3074. *Proposed by Cristinel Mortici, Valahia University of Targoviste, Romania.*

Let $f:\left[0,\frac{1}{2005}\right]\rightarrow\mathbb{R}$ be a function such that

$$f\left(x+y^2\right) \;\geq\; y+f(x),$$

for all real x and y with $x\in\left[0,\frac{1}{2005}\right]$ and $x+y^2\in\left[0,\frac{1}{2005}\right]$? Give an example of such a function, or show that no such function exists.

3075. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Solve the following equation where x is a positive real number:

$$\left(8^x-5^x\right)\left(7^x-2^x\right)\left(6^x-4^x\right)+\left(9^x-4^x\right)\left(8^x-3^x\right)\left(5^x-2^x\right) \;=\; 105^x .$$