PROBLEMS

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1er décembre 2005**. *Une étoile* ($\star$) *après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier et Martin Goldstein, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

3039. *Proposé par Dorin Mărghidanu, Colegiul Naţional "A.I. Cuza", Corabia, Roumanie.*

Soit a et b deux nombres réels non nuls donnés. Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f\left(x-\frac{b}{a}\right)+2x \;\le\; \frac{a}{b}x^2+2\frac{b}{a} \;\le\; f\left(x+\frac{b}{a}\right)-2x\,.$$

3040. *Proposé par Dorin Mărghidanu, Colegiul Naţional "A.I. Cuza", Corabia, Roumanie.*

Montrer que, pour trois nombres naturels a, b, c arbitraires mais distincts et plus grands que 1,

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{b}\right)\left(3+\frac{1}{c}\right) \;\le\; \frac{91}{8}\,.$$

3041. *Proposé par Ovidiu Furdui, étudiant, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, USA.*

Montrer que

(a) $\sin x = 2^{n-1}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout entier $n\ge 1$;

(b) $n\cot nx = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cot\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $x\in\left(0,\frac{\pi}{n}\right)$.

3042. *Proposé par Vasile Cîrtoaje, Université de Ploiesti, Roumanie.*

Soit x_1, x_2, $\ldots$, x_n des nombres positifs tels que $x_1x_2\cdots x_n = 1$. Si $n\ge 3$ et $0<\lambda\le (2n-1)/(n-1)^2$, montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_n}} \;\le\; \frac{n}{\sqrt{1+\lambda}}\,.$$

3043. *Proposé par Ovidiu Furdui, étudiant, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, USA.*

Pour tout quadrilatère convexe $ABCD$, montrer que

$$\begin{aligned} 1 - \cos(A+B)\cos(A+C)\cos(A+D) \\ \leq \; 2M \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{C+A}{2}\right), \end{aligned}$$

où $M = \max\{\sin A, \sin B, \sin C, \sin D\}$.

3044. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero et Juan José Egozcue, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Soit $\{a_n\}$ la suite définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et, pour $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Trouver la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n+2}}{a_{n-1}^2 a_{n+1}^2}\,.$$

3045. *Proposé par Vasile Cîrtoaje, Université de Ploiesti, Roumanie.*

Soit a, b et c des nombres réels positifs tels que $abc \geq 1$. Montrer que

(a) $a^{\frac{a}{b}} b^{\frac{b}{c}} c^{\frac{c}{a}} \geq 1$; (b) $a^{\frac{a}{b}} b^{\frac{b}{c}} c^{c} \geq 1$.

3046. *Proposé par James T. Bruening, Southeast Missouri State University, Cape Girardeau, MO, USA.*

On place un miroir dans le premier quadrant du plan des xy, perpendiculairement à ce plan et suivant la droite joignant les points $(b, 0)$ et $(0, b)$, pour un certain $b > 0$. Un autre miroir est placé de façon analogue, mais le long de la droite $y = kx$ où $k > 1$. Une source lumineuse placée en $(a, 0)$, $0 < a < b$, émet un rayon de lumière dans le premier quadrant parallèlement au premier miroir.

Trouver k tel que, lorsque le rayon est réfléchi une seule fois par chacun des miroirs, il revient à la source lumineuse en $(a, 0)$.

3047. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit n un entier positif. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sec\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$.

3048. *Proposé par Gabriel Dospinescu, Onesti, Roumanie.*

Trouver tous les polynômes P à coefficients entiers satisfaisant la propriété que, pour tous entiers a et b relativement premiers, la suite $\{P(an+b)\}_{n\geq 1}$ contient un nombre infini de termes relativement premiers deux à deux.

3049. *Proposé par Óscar Ciaurri, Université de La Rioja, Logroño, Espagne et José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

On donne la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\arctan x}$,

(a) trouver l'asymptote oblique L dans le premier quadrant, et

(b) trouver dans le premier quadrant l'aire limitée par le graphe de $y = f(x)$ et la droite L.

3050. *Proposé par Christopher J. Bradley, Bristol, GB.*

Soit ABC un triangle avec les Céviennes AX, BY et CZ. Soit respectivement L, M et N les points milieu de AX, BY et CZ. On suppose que AM et AN coupent respectivement BC en P_1 et P_2 ; que BN et BL coupent respectivement CA en Q_1 et Q_2 et finalement que CL et CM coupent respectivement AB en R_1 et R_2.

Montrer que P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2 sont sur une conique.

. . . .

3039. *Proposed by Dorin Mărghidanu, Colegiul Naţional "A.I. Cuza", Corabia, Romania.*

Let a, b be fixed non-zero real numbers. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that, for all $x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(x - \frac{b}{a}\right) + 2x \;\le\; \frac{a}{b}x^2 + 2\frac{b}{a} \;\le\; f\left(x + \frac{b}{a}\right) - 2x\,.$$

3040. *Proposed by Dorin Mărghidanu, Colegiul Naţional "A.I. Cuza", Corabia, Romania.*

Prove that, for any three distinct natural numbers a, b, c greater than 1,

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(2 + \frac{1}{b}\right)\left(3 + \frac{1}{c}\right) \;\le\; \frac{91}{8}\,.$$

3041. *Proposed by Ovidiu Furdui, student, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, USA.*

Prove that

(a) $\sin x = 2^{n-1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right)$ for all $x \in \mathbb{R}$ and all integers $n \ge 1$;

(b) $n \cot nx = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cot\left(x + \frac{k\pi}{n}\right)$ for $x \in \left(0, \frac{\pi}{n}\right)$.

3042. *Proposed by Vasile Cîrtoaje, University of Ploiesti, Romania.*

Let x_1, x_2, $\ldots$, x_n be positive numbers such that $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. For $n \geq 3$ and $0 < \lambda \leq (2n-1)/(n-1)^2$, prove that

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_n}} \;\leq\; \frac{n}{\sqrt{1+\lambda}}\,.$$

3043. *Proposed by Ovidiu Furdui, student, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, USA.*

For any convex quadrilateral $ABCD$, prove that

$$\begin{aligned} &1 - \cos(A+B)\cos(A+C)\cos(A+D) \\ &\qquad \leq\; 2M \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \sin\left(\frac{C+A}{2}\right)\,, \end{aligned}$$

where $M = \max\{\sin A, \sin B, \sin C, \sin D\}$.

3044. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero and Juan José Egozcue, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Let $\{a_n\}$ be the sequence defined by $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, and, for $n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Find the sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n+2}}{a_{n-1}^2 a_{n+1}^2}\,.$$

3045. *Proposed by Vasile Cîrtoaje, University of Ploiesti, Romania.*

Let a, b, c be positive real numbers such that $abc \geq 1$. Prove that

(a) $a^{\frac{a}{b}} b^{\frac{b}{c}} c^{\frac{c}{a}} \geq 1$; (b) $a^{\frac{a}{b}} b^{\frac{b}{c}} c^{c} \geq 1$.

3046. *Proposed by James T. Bruening, Southeast Missouri State University, Cape Girardeau, MO, USA.*

A mirror is placed in the first quadrant of the xy–plane (perpendicular to the plane) along the straight line joining the points $(b, 0)$ and $(0, b)$, for some $b > 0$. Another mirror is placed similarly along the line $y = kx$ where $k > 1$. A light source at $(a, 0)$, $0 < a < b$, shoots a beam of light into the first quadrant parallel to the first mirror.

Find k such that when the beam is reflected exactly once by each mirror, it passes through the original light source at $(a, 0)$.

3047. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let n be a positive integer. Evaluate $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sec\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$.

3048. *Proposed by Gabriel Dospinescu, Onesti, Romania.*

Find all polynomials P with integer coefficients which satisfy the property that, for any relatively prime integers a and b, the sequence $\{P(an+b)\}_{n\geq 1}$ contains an infinite number of terms, any two of which are relatively prime.

3049. *Proposed byÓscar Ciaurri, Universidad de La Rioja, Logroño, Spain and José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Given the function $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}e^{-\arctan x}$,

(a) find the slant asymptote L in the first quadrant, and

(b) find the area in the first quadrant bounded by the graph of $y = f(x)$ and the line L.

3050. *Proposed by Christopher J. Bradley, Bristol, UK.*

Let ABC be a triangle with Cevians AX, BY, CZ. Let L, M, N be the mid-points of AX, BY, CZ, respectively. Let AM and AN meet BC at P_1 and P_2, respectively; let BN and BL meet CA at Q_1 and Q_2, respectively; and let CL and CM meet AB at R_1 and R_2, respectively.

Prove that P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2 lie on a conic.