30: No 4 MAY / MAI 2004

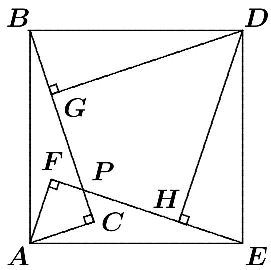
Published by:

Canadian Mathematical Society
Société mathématique du Canada
577 King Edward, POB/CP 450-A
Ottawa, ON K1N 6N5
Fax/Télec: 613 565 1539

SYNOPSIS

M144. *Proposé par Bruce Shawyer, Université Memorial de Terre-Neuve, St. John's, NL.*

Sur l'hypoténuse AB d'un triangle rectangle ABC on dessine un carré $ABDE$ de manière que C en soit un point intérieur. On dessine ensuite un triangle rectangle directement semblable BDG de sorte que G soit aussi un point intérieur du carré. On dessine finalement deux triangles rectangles indirectement semblables EDH et AEF, tels que H et F soient des points intérieurs du carré. Soit P le point d'intersection de BC et EF. Déterminer l'aire du quadrilatère $DGPH$ en fonction des côtés CA et CB du triangle rectangle original.



M145. *Proposé par Ovidiu-Gabriel Dinu, Balcesti-Valcea, Romanie.*

Trouver tous les nombres naturels n pour lesquels n, $n+2$, $n+6$, $n+8$ et $n+14$ sont premiers.

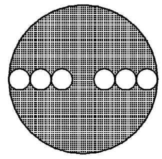
M146. *Proposé par Mohammed Aassila, Strasbourg, France.*

Soit a, b et c trois nombres positifs satisfaisant $a+b+c=1$. Montrer que

$$(ab)^{5/4}+(bc)^{5/4}+(ca)^{5/4} < \frac{1}{4}\,.$$

M147. *Proposé par l'Equipe de Mayhem.*

Le diamètre d'un grand cercle est divisé en n parties égales pour construire n cercles plus petits, comme dans la figure. Trouver n, sachant que le rapport entre l'aire achurée et l'aire non achurée du grand cercle est $3 : 1$.



M148. *Proposé par Vedula N. Murty, Dover, PA, USA.*

Soit $x > 1$, $y > 1$, $z > 1$ et $x^2 = yz$. Trouver la valeur de

$$\left(\log_{zx} xy^4z\right)\left(\log_{xy} xyz^4\right) .$$

M149. *Proposé par Bruce Shawyer, Université Memorial de Terre-Neuve, St. John's, NL.*

Soit ABC un triangle rectangle de Héron possédant la propriété suivante : son aire est λ fois son périmètre, avec λ un entier positif. Trouver toutes les solutions (a, b, λ). (Un triangle de Héron est un triangle dont la longueur des côtés et l'aire sont des nombres entiers.)

M150. *Proposé par Arkady Alt, San Jose, CA, USA.*

Soit deux nombres complexes z_1 et z_2 satisfaisant les conditions

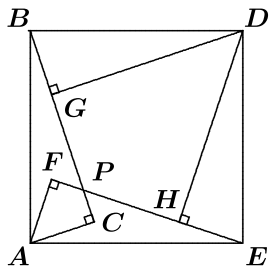
$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -(i+1) \\ z_1 \cdot z_2 &= -i \end{aligned}$$

Sans calculer z_1 et z_2, trouver $z_1 \cdot \overline{z_2}$.

....

M144. *Proposed by Bruce Shawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

A square $ABDE$ is drawn on the hypotenuse AB of right triangle ABC so that C lies in the interior of the square. A directly similar right triangle BDG is drawn so that G lies in the interior of the square. Indirectly similar right triangles EDH and AEF are drawn so that H and F lie in the interior of the square. Let BC and EF intersect at P. Determine the area of quadrilateral $DGPH$ in terms of the legs CA and CB of the original right triangle.



M145. *Proposed by Ovidiu-Gabriel Dinu, Balcesti-Valcea, Romania.*

Find all natural numbers n for which n, $n+2$, $n+6$, $n+8$, and $n+14$ are prime numbers.

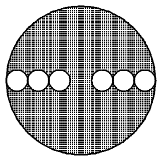
M146. *Proposed by Mohammed Aassila, Strasbourg, France.*

Let a, b, c be three positive numbers satisfying $a+b+c=1$. Prove that

$$(ab)^{5/4}+(bc)^{5/4}+(ca)^{5/4} \;<\; \frac{1}{4}\,.$$

M147. *Proposed by the Mayhem staff.*

The diameter of a large circle is broken into n equal parts to construct n smaller circles, as shown. Determine n so that the ratio of the shaded area to the unshaded area in the large circle is $3:1$.



M148. *Proposed by Vedula N. Murty, Dover, PA, USA.*

Let $x>1$, $y>1$, $z>1$ and $x^2=yz$. Determine the value of

$$\left(\log_{zx} xy^4z\right)\left(\log_{xy} xyz^4\right)\,.$$

M149. *Proposed by Bruce Shawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

A right-angled Heron triangle ABC has the following property: the area is λ times the perimeter, where λ is a positive integer. Determine all solutions (a,b,λ). (A Heron triangle is a triangle with integer sides and integer area.)

M150. *Proposed by Arkady Alt, San Jose, CA, USA.*

Let two complex numbers z_1 and z_2 satisfy the conditions

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= -(i+1) \\ z_1\cdot z_2 &= -i \end{aligned}$$

Without calculating z_1 and z_2, find $z_1\cdot\overline{z_2}$.

2942. [2002–135] *Proposé par Toshio Seimiya, Kawasaki, Japon.*

Soit ABC un triangle tel que l'angle ABC soit le double de l'angle ACB. De plus, soit D un point sur le rayon CB tel que l'angle ADC soit la moitié de l'angle BAC. Montrer que

$$\frac{1}{CD} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AC}\,.$$

. . . .

Given $\triangle ABC$ with $\angle ABC = 2\angle ACB$, suppose that D is a point on the ray CB such that $\angle ADC = \frac{1}{2}\angle BAC$. Prove that

$$\frac{1}{CD} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AC}\,.$$