# PROBLEMS

*Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le* **1er décembre 2004**. *Une étoile* ($\star$) *après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier et Martin Goldstein, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

**2939**. *Proposé par Toshio Seimiya, Kawasaki, Japon.*

Supposons que $I$ soit le centre du cercle inscrit du triangle $ABC$ et que $BI$ et $CI$ coupent respectivement $AC$ et $AB$ en $D$ et $E$. Supposons de plus que la bissectrice de l'angle $BIC$ coupe $BC$ respectivement $DE$ en $P$ et $Q$, et que finalement $PI = 2QI$. Montrer que l'angle $BAC$ est égal à $60^\circ$.

**2940**. *Proposé par Toshio Seimiya, Kawasaki, Japon.*

On donne un triangle $ABC$ dans lequel les bissectrices des angles $ABC$ and $ACB$ coupent $AC$ et $AB$ en $D$ et $E$ ; de plus, la différence entre l'angle $ADE$ et l'angle $AED$ est $60^\circ$. Montrer que l'angle $ACB$ est égal à $120^\circ$.

**2941**. *Proposé par Toshio Seimiya, Kawasaki, Japon.*

Soit $ABC$ un triangle tel que les bissectrices des angles $ABC$ et $ACB$ coupent respectivement $AC$ et $AB$ en $D$ et $E$. Soit $I$ l'intersection de $BD$ et $CE$, et soit $F$ le pied de la perpendiculaire abaissée de $I$ sur $BC$. Montrer que l'égalité des angles $ADE$ et $BIF$ entraîne celle des angles $AED$ et $CIF$.

**2942**. *Proposé par Toshio Seimiya, Kawasaki, Japon.*

Soit $ABC$ un triangle tel que l'angle $ABC$ soit le double de l'angle $ACB$. De plus, soit $D$ un point sur le rayon $CB$ tel que l'angle $ADC$ soit la moitié de l'angle $BAC$. Montrer que

$$\frac{1}{CD} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AC}\,.$$

**2943**. *Proposé par Toshio Seimiya, Kawasaki, Japon.*

Dans un triangle donné $ABC$, soit $\alpha$ l'angle $BAC$, $D$ le point sur $AB$ au-delà de $B$ tel que $BD = BC$, et $E$ le point sur $AC$ au-delà de $C$ tel que $CE = BC$. De plus, on suppose que $P$ est l'intersection de $BE$ et $CD$, et que $\frac{DP}{BE} + \frac{EP}{CD} = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Montrer que $\alpha = 90^\circ$.

**2944**. *Proposé par Václav Konečný, Big Rapids, MI, USA.*

On donne une ellipse de foyers $F_1$ et $F_2$, ainsi que les sommets $V_1'$ et $V_2'$ du petit axe. Soit $P$ un point et $\ell$ une droite ne passant pas par $P$. Avec une équerre seulement, construire la droite par $P$ qui est

(a) parallèle à $\ell$;

(b) perpendiculaire à $\ell$.

Les constructions sont bien connues si l'on donne un cercle avec son centre au lieu d'une ellipse avec ses foyers (Théorème de Poncelet–Steiner).

**2945**. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit $G$ le centre de gravité du triangle $A_1A_2A_3$. Pour $j = 1, 2, 3$, on considère un cercle tangent à $A_jA_{j+1}$ en $T_j$ et à $A_jA_{j+2}$ en $U_j$, de telle sorte que $G$ soit sur le segment $T_jU_j$ (les indices sont comptés modulo 3). Montrer que

$$|GT_1| \cdot |GT_2| \cdot |GT_3| \;=\; |GU_1| \cdot |GU_2| \cdot |GU_3|\,.$$

**2946**. *Proposé par Panos E. Tsaoussoglou, Athènes, Grèce.*

Soit $x$, $y$ et $z$ des nombres réels positifs satisfaisant $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Montrer que

(a) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - (x + y + z) \geq 2\sqrt{3}$.

(b) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + (x + y + z) \geq 4\sqrt{3}$.

**2947★**. *Proposé par Abbas Mehrabian, étudiant, Téhéran, Iran.*

La solution proposée pour le problème 2149 [1996 : 171 ; 1997 : 306–308] a une lacune que nous proposons de combler par le problème suivant. Soit $A'B'C'D'$ un quadrilatère avec un cercle inscrit centré en $O$. Pour tout point $P$ à l'intérieur de $A'B'C'D'$, on définit $ABCD$ comme étant le quadrilatère dont les côtés passent par les sommets de $A'B'C'D'$ et sont perpendiculaires au sommet à la droite joignant celui-ci à $P$. Montrer que $P$ est le point d'intersection des diagonales $AC$ et $BD$ si et seulement si $P = O$.

**2948★**. *Proposé par Juan-Bosco Romero Márquez, Université de Valladolid, Valladolid, Espagne.*

Confirmer ou infirmer qu'il existe une unique solution du système d'équations

$$\begin{array}{rcl} & bb' + cc' \;=\; aa' - rr'\,, & \\ a^2 = b^2 + c^2\,, & & a'^2 = b'^2 + c'^2\,, \\ 2r = b + c - a\,, & & 2r' = b' + c' - a'\,, \end{array}$$

(où $r$ et $r'$ sont les rayons intérieurs des triangles rectangles de Héron associés) donnés par

$$a = 5\,,\;\; b = 4\,,\;\; c = 3\,,\;\; r = 1\,;\quad \text{et}\quad a' = 13\,, b' = 12\,,\;\; c' = 5\,,\;\; r' = 2\,.$$

**2949★**. *Proposé par Walther Janous, Ursulinengymnasium, Innsbruck, Autriche.*

Soit $n \geq 3$ un nombre naturel *impair*. Trouver le plus petit nombre $\mu = \mu(n)$ tel que les éléments de chaque ligne et de chaque colonne de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,\mu} \\ 2 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & a_{n,2} & \cdots & a_{n,\mu} \end{pmatrix}$$

sont des éléments différents pris dans la liste $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$, et que la somme des éléments de chaque ligne est la même.

**2950★**. *Proposé par Walther Janous, Ursulinengymnasium, Innsbruck, Autriche.*

Soit $ABC$ un triangle dont le plus grand angle ne dépasse pas $2\pi/3$. Avec $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$, on considère des inégalités de la forme

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{C}{2}\right) \;\geq\; \lambda + \mu\cdot\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{B}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{C}{2}\right)\,.$$

(a) Montrer que $\lambda_{\max} \geq \dfrac{2\sqrt{3}-1}{8}$.

(b) Montrer ou réfuter l'assertion suivante :

$$\lambda \;=\; \frac{2\sqrt{3}-1}{8} \qquad \text{et} \qquad \mu \;=\; 1+\sqrt{3}$$

donne la meilleure inégalité, dans le sens que $\lambda$ ne peut pas être augmenté. Déterminer aussi les cas d'égalité.

**2939**. *Proposed by Toshio Seimiya, Kawasaki, Japan.*

Suppose that $\triangle ABC$ has incentre $I$ and that $BI$, $CI$ meet $AC$, $AB$ at $D$, $E$, respectively. Suppose further that the bisector of $\angle BIC$ meets $BC$ and $DE$ at $P$ and $Q$, respectively, and that $PI = 2QI$. Prove that $\angle BAC = 60^\circ$.

**2940**. *Proposed by Toshio Seimiya, Kawasaki, Japan.*

In $\triangle ABC$, the bisectors of $\angle ABC$ and $\angle ACB$ meet $AC$ and $AB$ at $D$ and $E$, respectively, and $\angle ADE - \angle AED = 60^\circ$. Prove that $\angle ACB = 120^\circ$.

**2941**. *Proposed by Toshio Seimiya, Kawasaki, Japan.*

In $\triangle ABC$, the bisectors of $\angle ABC$ and $\angle ACB$ meet $AC$ and $AB$ at $D$ and $E$, respectively. Let $I$ be the intersection of $BD$ and $CE$, and let $F$ be the foot of the perpendicular from $I$ to $BC$. Prove that if $\angle ADE = \angle BIF$, then $\angle AED = \angle CIF$.

**2942**. *Proposed by Toshio Seimiya, Kawasaki, Japan.*

Given $\triangle ABC$ with $\angle ABC = 2\angle ACB$, suppose that $D$ is a point on the ray $CB$ such that $\angle ADC = \frac{1}{2}\angle BAC$. Prove that

$$\frac{1}{CD} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AC}.$$

**2943**. *Proposed by Toshio Seimiya, Kawasaki, Japan.*

Given $\triangle ABC$, let $D$ be the point on $AB$ produced beyond $B$ such that $BD = BC$, and let $E$ be the point on $AC$ produced beyond $C$ such that $CE = BC$. Let $P$ be the intersection of $BE$ and $CD$, and suppose that $\frac{DP}{BE} + \frac{EP}{CD} = 2\sin\left(\frac{\angle BAC}{2}\right)$. Prove that $\angle BAC = 90^\circ$.

**2944**. *Proposed by Václav Konečný, Big Rapids, MI, USA.*

Given an ellipse with foci $F_1$ and $F_2$, minor vertices $V_1'$ and $V_2'$, a line $\ell$, and a point $P$ not on $\ell$. Construct, with straightedge alone, the line through $P$ which is

(a) parallel to $\ell$;

(b) perpendicular to $\ell$.

The constructions are well known, if a circle with its centre is given instead of an ellipse and its foci (Poncelet–Steiner Construction Theorem).

**2945**. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $G$ be the centroid of $\triangle A_1A_2A_3$. For $j = 1, 2, 3$, a circle is tangent to $A_jA_{j+1}$ at $T_j$ and to $A_jA_{j+2}$ at $U_j$, so that $G$ lies on the line segment $T_jU_j$ (subscripts are taken modulo 3). Prove that

$$|GT_1| \cdot |GT_2| \cdot |GT_3| \;=\; |GU_1| \cdot |GU_2| \cdot |GU_3|\,.$$

**2946**. *Proposed by Panos E. Tsaoussoglou, Athens, Greece.*

Let $x$, $y$, $z$ be positive real numbers satisfying $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Prove that

(a) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - (x + y + z) \ge 2\sqrt{3}$.

(b) $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + (x + y + z) \ge 4\sqrt{3}$.

**2947★**. *Proposed by Abbas Mehrabian, student, Tehran, Iran.*

The featured solution to problem 2149 [1996 : 171; 1997 : 306–308] is missing a step, which we remedy by means of the following problem. Let $A'B'C'D'$ be a quadrilateral with an inscribed circle centred at $O$. For any point $P$ inside $A'B'C'D'$, define $ABCD$ to be the convex quadrilateral whose sides pass through the vertices of $A'B'C'D'$ and are perpendicular at the vertex to the line joining it to $P$. Prove that $P$ is the intersection point of the diagonals $AC$ and $BD$ if and only if $P = O$.

**2948★**. *Proposed by Juan-Bosco Romero Márquez, Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain.*

Prove or disprove that the unique solution of the system of equations

$$\begin{array}{rclrcl} & & bb' + cc' & = & aa' - rr'\,, & \\ a^2 & = & b^2 + c^2\,, & a'^2 & = & b'^2 + c'^2\,, \\ 2r & = & b + c - a\,, & 2r' & = & b' + c' - a'\,, \end{array}$$

among Heron right triangles, where $r$ and $r'$ are their associated inradii, is given by

$$a = 5\,,\; b = 4\,,\; c = 3\,,\; r = 1\,; \quad \text{and} \quad a' = 13\,, b' = 12\,,\; c' = 5\,,\; r' = 2\,.$$

**2949**★. *Proposed by Walther Janous, Ursulinengymnasium, Innsbruck, Austria.*

Let $n \geq 3$ be an *odd* natural number. Determine the smallest number $\mu = \mu(n)$ such that the entries of any row and of any column of the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,\mu} \\ 2 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & a_{n,2} & \cdots & a_{n,\mu} \end{pmatrix}$$

are distinct numbers from the set $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$, and the numbers in each row sum to the same value.

**2950**★. *Proposed by Walther Janous, Ursulinengymnasium, Innsbruck, Austria.*

Let $ABC$ be a triangle whose largest angle does not exceed $2\pi/3$. For $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$, consider inequalities of the form

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{C}{2}\right) \;\geq\; \lambda + \mu\cdot\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{B}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{C}{2}\right)\,.$$

(a) Prove that $\lambda_{\text{max}} \geq \dfrac{2\sqrt{3}-1}{8}$.

(b) Prove or disprove that

$$\lambda \;=\; \frac{2\sqrt{3}-1}{8} \qquad \text{and} \qquad \mu \;=\; 1+\sqrt{3}$$

yield the best inequality in the sense that $\lambda$ cannot be increased. Determine also the cases of equality.