SKOLIAD No. 78

Shawn Godin

Please send your solutions to the problems in this edition by *1 November, 2004*. A copy of **MATHEMATICAL MAYHEM Vol. 4** will be presented to one pre-university reader who sends in solutions before the deadline. The decision of the editor is final.

We will only print solutions to problems marked with an asterisk ($*$) if we receive them from students in grade 10 or under (or equivalent), or if we receive a unique solution or a generalization.

This month's questions are drawn from the first annual Hypatia contest for grade 11 students run by the Canadian Mathematics Competition. Thanks to Ian VanderBurgh and Peter Crippin for making these questions available.

2003 Concours Hypatie
(11^{e} année - Sec. V au Québec)
mercredi 16 avril 2003

1. (a) Carl a un certain nombre de tuiles carrées mesurant chacune 1 cm sur 1 cm. Il les place de manière à former un grand carré dont les côtés mesurent n cm et constate qu'il reste 92 tuiles non utilisées. S'il avait allongé les côtés du grand carré jusqu'à $(n+2)$ cm, il lui aurait manqué 100 tuiles pour réussir à former le grand carré. Combien de tuiles Carl a-t-il ?

(b) Diane, l'amie de Carl, arrive avec une grosse pile de blocs, chacun étant un cube dont les arêtes mesurent 1 cm. Carl prend une partie des blocs et Diane garde le reste. Carl utilise ses blocs pour tenter de former un gros cube dont les arêtes mesurent 8 cm, mais il constate qu'il lui manque 24 blocs. Diane réussit à former un gros cube en utilisant tous ses blocs. S'ils utilisent tous les blocs que Diane a apportés, ils peuvent former un grand cube dont les arêtes ont 2 cm de plus que celles du grand cube de Diane. Combien y a-t-il de cubes en tout ?

Prolongement du Problème 1 : Comme dans la question 1 (a), Carl place ses tuiles de manière à former un grand carré et il lui reste 92 tuiles non utilisées. Pour former un carré plus grand, il ajoute un certain nombre de tuiles à chaque côté du carré précédent et constate qu'il lui manque 100 tuiles pour compléter le carré. Combien de nombres différents de tuiles Carl peut-il avoir ?

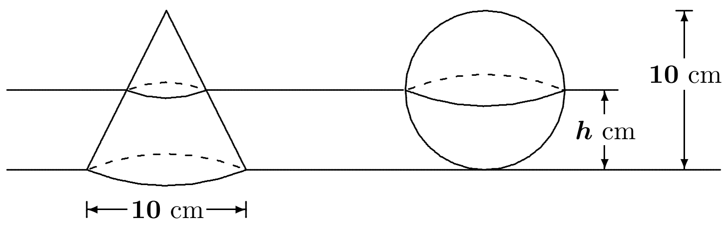
2. Xavier et Yvonne participent à un jeu. Au départ, il y a un certain nombre de pièces de monnaie placées en piles. Xavier joue toujours le premier. À tour de rôle, chacun enlève au moins une pièce d'une seule pile. La personne qui enlève la dernière pièce gagne.

(a) S'il y a deux piles contenant chacune trois pièces de monnaie, démontrer qu'Yvonne peut s'assurer de toujours gagner.

(b) S'il y a une pile de 1 pièce, une pile de 2 pièces et une pile de 3 pièces, démontrer qu'Yvonne peut s'assurer de toujours gagner.

Prolongement du Problème 2 : S'il y a trois piles, contenant 2, 4 et 5 pièces, quel joueur gagnera si chacun fait toujours le meilleur choix? Expliquer la stratégie gagnante.

3. Une sphère a un diamètre de 10 cm. Un cône droit a une hauteur de 10 cm et sa base est un cercle dont le diamètre mesure 10cm. Les deux solides reposent sur une surface horizontale. Si un plan horizontal coupe la sphère et le cône, la coupe transversale est un cercle dans les deux cas, comme l'indique le diagramme. Déterminer la hauteur du plan qui forme deux cercles de même aire.



Prolongement du Problème 3 : Une sphère de diamètre d et un cône circulaire droit, dont la base a un diamètre d, reposent sur une surface horizontale. Dans ce cas, la hauteur du cône est égale au rayon de la sphère. Démontrer que si un plan horizontal coupe les deux solides, la somme de l'aire des coupes transversales est toujours constante.

4. Le carré $ABCD$ a pour sommets $A(1,4)$, $B(5,4)$, $C(5,8)$, et $D(1,8)$. Depuis un point P à l'extérieur du carré, on dit qu'un sommet du carré est visible si on peut le relier à P au moyen d'un segment de droite qui ne passe pas à travers le carré. Ainsi depuis un point P à l'extérieur du carré, il y a toujours deux ou trois sommets du carré qui sont visibles. L'aire visible de P est l'aire du triangle ou la somme de l'aire des deux triangles formés en reliant P aux deux ou trois sommets visibles du carré.

(a) Démontrer que l'aire visible du point $P(2,-6)$ est égale à 20 unités carrées.

(b) Démontrer que l'aire visible du point $Q(11,0)$ est aussi égale à 20 unités carrées.

(c) L'ensemble des points P qui ont une aire visible de 20 unités carrées est appelé l'ensemble 20/20. Cet ensemble a la forme d'un polygone. Déterminer le périmètre de l'ensemble 20/20.

Prolongement du Problème 4 : Depuis un point quelconque P, à l'extérieur d'un cube unitaire, 4, 6 ou 7 sommets du cube sont visibles dans le même sens que pour le carré. Si on relie le point P à chacun de ces sommets, on obtient 1, 2 ou 3 pyramides à base carrée qui forment le volume visible de P. L'ensemble 20/20 est l'ensemble de tous les points P qui ont un volume visible de 20. Il a la forme d'un polyèdre. Quelle est l'aire totale de ce polyèdre ?

2003 Hypatia Contest (Grade 11)
Wednesday, April 16, 2003

1. (a) Quentin has a number of square tiles, each measuring 1 cm by 1 cm. He tries to put these small square tiles together to form a larger square of side length n cm, but finds that he has 92 tiles left over. If he had increased the side length of the larger square to $(n+2)$ cm, he would have been 100 tiles short of completing the larger square. How many tiles does Quentin have?

(b) Quentin's friend Rufus arrives with a big pile of identical blocks, each in the shape of a cube. Quentin takes some of the blocks and Rufus takes the rest. Quentin uses his blocks to try to make a large cube with 8 blocks along each edge, but finds that he is 24 blocks short. Rufus, on the other hand, manages to exactly make a large cube using all of his blocks. If they use all of their blocks together, they are able to make a complete cube which has a side length that is 2 blocks longer than Rufus' cube. How many blocks are there in total?

Extension to #1: As in Question #1 (a), Quentin tries to make a large square out of square tiles and has 92 tiles left over. In an attempt to make a second square, he increases the side length of this first square by an unknown number of tiles and finds that he is 100 tiles short of completing the square. How many different numbers of tiles is it possible for Quentin to have?

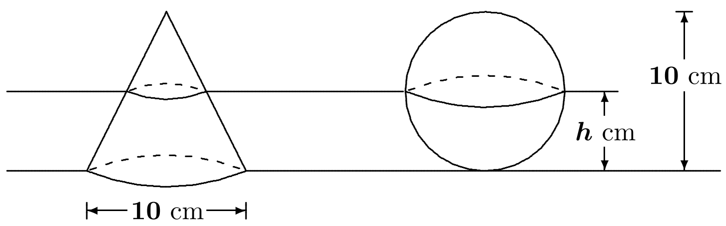
2. Xavier and Yolanda are playing a game starting with some coins arranged in piles. Xavier always goes first, and the two players take turns removing one or more coins from any one pile. The player who takes the last coin wins.

(a) If there are two piles of coins with 3 coins in each pile, show that Yolanda can guarantee that she always wins the game.

(b) If the game starts with piles of 1, 2, and 3 coins [*Ed:* three piles altogether], explain how Yolanda can guarantee that she always wins the game.

Extension to #2: If the game starts with piles of 2, 4, and 5 coins, which player wins if both players always make their best possible move? Explain the winning strategy.

3. In the diagram, the sphere has a diameter of 10 cm. Also, the right circular cone has a height of 10 cm, and its base has a diameter of 10 cm. The sphere and cone sit on a horizontal surface. If a horizontal plane cuts both the sphere and the cone, the cross-sections will both be circles, as shown. Find the height of the horizontal plane that gives circular cross-sections of the sphere and cone of equal area.



Extension to #3: A sphere of diameter d and a right circular cone with a base of diameter d stand on a horizontal surface. In this case, the height of the cone is equal to the radius of the sphere. Show that, for any horizontal plane that cuts both the cone and the sphere, the sum of the areas of the circular cross-sections is always the same.

4. Square $ABCD$ has vertices $A(1,4)$, $B(5,4)$, $C(5,8)$, and $D(1,8)$. From a point P outside the square, a vertex of the square is said to be visible if it can be connected to P by a straight line that does not pass through the square. Thus, from any point P outside the square, either two or three of the vertices of the square are visible. The visible area of P is the area of the one triangle or the sum of the areas of the two triangles formed by joining P to the two or three visible vertices of the square.

(a) Show that the visible area of $P(2,-6)$ is 20 square units.

(b) Show that the visible area of $Q(11,0)$ is also 20 square units.

(c) The set of points P for which the visible area equals 20 square units is called the 20/20 set, and is a polygon. Determine the perimeter of the 20/20 set.

Extension to #4: From any point P outside a unit cube, 4, 6, or 7 vertices are visible in the same sense as in the case of the square. Connecting point P to each of these vertices gives 1, 2, or 3 square-based pyramids, which make up the visible volume of P. The 20/20 set is the set of all points P for which the visible volume is 20, and is a polyhedron. What is the surface area of this 20/20 set?