Mayhem Problems

Veuillez nous transmettre vos solutions aux problèmes du présent numéro avant le **premier septembre 2004**. *Les solutions reçues après cette date ne seront prises en compte que s'il nous reste du temps avant la publication des solutions.*

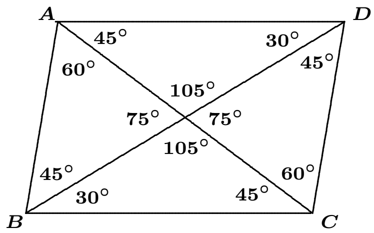
Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier et Martin Goldstein, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

M132. *Proposé par Peter Y. Woo, Biola University, La Mirada, CA, USA.*

(a) Qui a-t-il de faux dans le dessin du parallélogramme ci-contre ? Les angles sont mesurés en degrés.

(b) Proposez une modification qui rendrait le dessin plausible. On ne doit pas modifier les segments issus de B.



M133. *Proposé par K.R.S. Sastry, Bangalore, Inde.*

Dans un pentagone $ABCDE$, chaque côté est parallèle à une diagonale. Montrer que le rapport d'une diagonale au côté parallèle correspondant est constant. En fait, cette constante est le nombre d'or. (Un tel pentagone est appelé *un pentagone d'or*.)

M134. *Proposé par K.R.S. Sastry, Bangalore, Inde.*

Dans un pentagone d'or $ABCDE$ (voir le problème précédent pour la définition), l'angle EAB est égal à l'angle BCD. Montrer que l'angle CDE est égal à l'angle DEA.

M135. *Proposé par l'Équipe de Mayhem.*

Trouver tous les nombres de deux chiffres avec exactement 8 diviseurs positifs.

M136. *Proposé par l'Équipe de Mayhem.*

Pour construire un nombre de cinq chiffres, on utilise chacun des chiffres 1, 4, 5, 7, et 8 une seule fois. Déterminer la somme de tous les différents nombres de cinq chiffres ainsi construits.

M137. *Proposé par Babis Stergiou, Lycio Psachnon Evias, Grèce.*

Soit a, b, $c > 0$, $a + b + c = 3$, et $abc = 1$.

(a) Montrer que $(a^2+b)(a+b^2) \geq (a+a^2)(b+b^2)$;

(b) Déduire de (a) que (ou sinon montrer que)

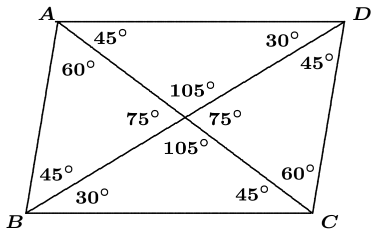
$$\frac{ab}{(a^2+b)(a+b^2)} + \frac{bc}{(b^2+c)(b+c^2)} + \frac{ca}{(c^2+a)(c+a^2)} \leq \frac{3}{4}.$$

. . . .

M132. *Proposed by Peter Y. Woo, Biola University, La Mirada, CA, USA.*

(a) What is wrong with the diagram of the parallelogram? The angle measures are in degrees.

(b) Suggest a modification that would make the diagram plausible. You are not allowed to modify the three lines through B.



M133. *Proposed by K.R.S. Sastry, Bangalore, India.*

In pentagon $ABCDE$, each side is parallel to a diagonal. Show that the ratio of a diagonal to the corresponding parallel side is constant. In fact, this constant is the golden ratio. (Such a pentagon is called a *golden pentagon*.)

M134. *Proposed by K.R.S. Sastry, Bangalore, India.*

In golden pentagon $ABCDE$ (see the preceding problem for the definition), we have $\angle EAB = \angle BCD$. Show that $\angle CDE = \angle DEA$.

M135. *Proposed by the Mayhem staff.*

Find all two-digit numbers with exactly 8 positive divisors.

M136. *Proposed by the Mayhem staff.*

The digits 1, 4, 5, 7, and 8 are each used once to form a five-digit number. Determine the sum of all such distinct five-digit numbers.

M137. *Proposed by Babis Stergiou, Lycio Psachnon Evias, Greece.*

Suppose a, b, $c > 0$, $a+b+c=3$, and $abc=1$.

(a) Prove that $(a^2+b)(a+b^2) \geq (a+a^2)(b+b^2)$.

(b) Hence, or otherwise, prove that

$$\frac{ab}{(a^2+b)(a+b^2)} + \frac{bc}{(b^2+c)(b+c^2)} + \frac{ca}{(c^2+a)(c+a^2)} \leq \frac{3}{4}.$$