PROBLEMS

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1er octobre 2004**. *Une étoile* ($\star$) *après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier et Hidemitsu Saeki, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

2914. *Proposé par Toshio Seimiya, Kawasaki, Japon.*

Sur les côtés d'un triangle acutangle ABC, on construit extérieurement des triangles isocèles de même type, DBC, ECA et FAB, de sorte que

$$\begin{aligned} \angle DBC &= \angle DCB = \angle EAC = \angle ECA \\ &= \angle FAB = \angle FBA = \angle BAC\,. \end{aligned}$$

Soit M le point milieu de BC, P et Q les intersections respectives de DE avec AC et de DF avec AB.

Montrer que $MP : MQ = AB : AC$.

2915. *Proposé par Toshio Seimiya, Kawasaki, Japon.*

On donne un triangle ABC avec $AB < AC$ et soit I le centre du cercle inscrit, M le point milieu de BC. Supposons que D soit l'intersection de IM avec AB et que E soit l'intersection avec CI de la perpendiculaire abaissée de B sur AI .

Montrer que $DE \parallel AC$.

2916. *Proposé par George Tsintsifas, Thessalonique, Grèce.*

Soit $S = A_1A_2A_3A_4$ un tétrahèdre et M le point de Steiner, c'est-à-dire le point tel que $\sum\limits_{j=1}^{4} A_jM$ soit minimal. Si M est un point intérieur de S et si A_j' dénote l' intersection de A_jM avec la face opposée, montrer que

$$\sum_{j=1}^{4} A_jM \;\geq\; 3\sum_{j=1}^{4} A_j'M\,.$$

2917★. *Proposé par Šefket Arslanagić et Faruk Zejnulahi, Université de Sarajevo, Sarajevo, Bosnie et Herzégovine.*

Si x_1, x_2, x_3, x_4, $x_5 \geq 0$ et $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$, montrer ou réfuter l'inégalité

$$\frac{x_1}{1+x_2} + \frac{x_2}{1+x_3} + \frac{x_3}{1+x_4} + \frac{x_4}{1+x_5} + \frac{x_5}{1+x_1} \geq \frac{5}{6}.$$

2918. *Proposé par Šefket Arslanagić et Faruk Zejnulahi, Université de Sarajevo, Sarajevo, Bosnie et Herzégovine.*

Soit a_1, a_2, $\ldots$, a_{100} des nombres réels satisfaisant :

$$\begin{aligned} a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{100} &\geq 0\,; \\ a_1^2 + a_2^2 &\geq 200\,; \\ a_3^2 + a_4^2 + \cdots + a_{100}^2 &\geq 200\,. \end{aligned}$$

Quelle est la valeur minimale de $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$?

2919★. *Proposé par Ross Cressman, Université Wilfrid Laurier, Waterloo, ON.*

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 1$, et soit

$$T_n = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_j > 0 \text{ for } j = 1, \ldots, n, \text{ and } \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \right\}.$$

Soit p, q et $r \in T_n$ tels que $\sum_{j=1}^{n} \sqrt{q_j r_j} < \sum_{j=1}^{n} \sqrt{p_j r_j}$.

Confirmer ou infirmer que :

(a) $\sum_{j=1}^{n} \sqrt{q_j\,(r_j + p_j)} < \sum_{j=1}^{n} \sqrt{p_j\,(r_j + p_j)}$,

(b) pour tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$\sum_{j=1}^{n} \sqrt{q_j\,(\lambda r_j + (1-\lambda) p_j)} < \sum_{j=1}^{n} \sqrt{p_j\,(\lambda r_j + (1-\lambda) p_j)}\,.$$

[Remarques du proposeur : (a) est un cas spécial de (b) avec $\lambda = \frac{1}{2}$. Cette question est reliée aux propriétés de la métrique de Shahshahani sur T_n, une métrique importante pour la génétique de populations.]

2920. *Proposé par Simon Marshall, étudiant, Onslow College, Wellington, Nouvelle-Zélande.*

Soit a, b et c des nombres réels positifs. Montrer que

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) \;\geq\; 3\left(a^3b + b^3c + c^3a\right) .$$

2921. *Proposé par Barry R. Monson, Université de Nouveau-Brunswick, Fredericton, NB ; et J. Chris Fisher, Université de Regina, Regina, SK.*

A l'aide de *Cinderella*™ et *Lénárt sphere*™ on peut de nos jours faire d'authentiques constructions sphériques, utilisant une règle sphérique pour dessiner le grand cercle passant par deux points A and B, et des compas sphériques pour dessiner le cercle de centre A et de rayon BC ($\leq \frac{\pi}{2}$, par exemple, sur une sphère unité).

Donner une construction sphérique simple pour les sommets d'un icosahèdre régulier inscrit dans une sphère.

2922. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Si n est un entier non négatif, trouver une formule fermée pour la somme

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^k \binom{n}{k}\binom{2n-k}{n} .$$

2923. *Proposé par Šefket Arslanagić, Université de Sarajevo, Sarajevo, Bosnie et Herzégovine.*

Supposons que x, $y \geq 0$ (x, $y \in \mathbb{R}$) et $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$. Montrer que $x^3 + y^3 \leq 2$.

2924. *Proposé par Todor Mitev, Université de Rousse, Rousse, Bulgarie.*

Soit x_1, …, x_n ($n \geq 3$) des nombres réels positifs satisfaisant

$$\frac{1}{1 + x_2^2 x_3 \cdots x_n} + \frac{1}{1 + x_1 x_3^2 \cdots x_n} + \cdots + \frac{1}{1 + x_1^2 x_2 \cdots x_{n-1}} \;\geq\; \alpha\,, \quad (1)$$

pour un certain $\alpha > 0$. Montrer que

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \;\geq\; \frac{n\alpha}{n-\alpha} x_1 x_2 \cdots x_n\,. \quad (2)$$

2925. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit n un entier tel que $n \geq 3$. Trouver les zéros de la fonction

$$f_n(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin(k\pi/n)}{\sin\big((k\pi/n)-x\big)}\,.$$

. . . .

2914. *Proposed by Toshio Seimiya, Kawasaki, Japan.*

On the sides of an acute-angled triangle ABC, similar isosceles triangles DBC, ECA, FAB are constructed externally, such that

$$\begin{aligned}\angle DBC \;&=\; \angle DCB \;=\; \angle EAC \;=\; \angle ECA \\ &=\; \angle FAB \;=\; \angle FBA \;=\; \angle BAC\,.\end{aligned}$$

Let M be the mid-point of BC, and let P and Q be the intersections of DE with AC and of DF with AB, respectively.

Prove that $MP : MQ \;=\; AB : AC$.

2915. *Proposed by Toshio Seimiya, Kawasaki, Japan.*

Given triangle ABC with $AB < AC$, let I be its incentre and let M be the mid-point of BC. Suppose that D is the intersection of IM with AB and that E is the intersection of CI with the perpendicular from B to AI.

Prove that $DE \parallel AC$.

2916. *Proposed by G. Tsintsifas, Thessaloniki, Greece.*

Let $S = A_1A_2A_3A_4$ be a tetrahedron and let M be the Steiner point; that is, the point M is such that $\sum\limits_{j=1}^{4} A_jM$ is minimized. Assuming that M is an interior point of S, and denoting by A_j' the intersection of A_jM with the opposite face, prove that

$$\sum_{j=1}^{4} A_jM \;\geq\; 3\sum_{j=1}^{4} A_j'M\,.$$

2917★. *Proposed by Šefket Arslanagić and Faruk Zejnulahi, University of Sarajevo, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina.*

If x_1, x_2, x_3, x_4, $x_5 \geq 0$ and $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 1$, prove or disprove that

$$\frac{x_1}{1+x_2}+\frac{x_2}{1+x_3}+\frac{x_3}{1+x_4}+\frac{x_4}{1+x_5}+\frac{x_5}{1+x_1} \;\geq\; \frac{5}{6}\,.$$

2918. *Proposed by Šefket Arslanagić and Faruk Zejnulahi, University of Sarajevo, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina.*

Let a_1, a_2, ..., a_{100} be real numbers satisfying:

$$\begin{aligned} a_1 \ \geq \ a_2 \ \geq \ \cdots \ \geq \ a_{100} \ &\geq \ 0\,; \\ a_1^2 + a_2^2 \ &\geq \ 200\,; \\ a_3^2 + a_4^2 + \cdots + a_{100}^2 \ &\geq \ 200\,. \end{aligned}$$

What is the minimum value of $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$?

2919★. *Proposed by Ross Cressman, Wilfrid Laurier University, Waterloo, ON.*

Let $n \in \mathbb{N}$ with $n > 1$, and let

$$T_n = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_j > 0 \text{ for } j = 1, \ldots, n, \text{ and } \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \right\}.$$

Let p, q, $r \in T_n$ such that $\sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{q_j r_j} < \sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{p_j r_j}$.

Prove or disprove:

(a) $\sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{q_j\,(r_j + p_j)} \ < \ \sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{p_j\,(r_j + p_j)}$,

(b) for all $\lambda \in [0, 1]$,

$$\sum_{j=1}^{n} \sqrt{q_j\,(\lambda r_j + (1-\lambda) p_j)} \ < \ \sum_{j=1}^{n} \sqrt{p_j\,(\lambda r_j + (1-\lambda) p_j)}\,.$$

[Proposer's remarks: (a) is the special case of (b) with $\lambda = \frac{1}{2}$. This question is connected with properties of the Shahshahani metric on T_n, a metric important for population genetics.]

2920. *Proposed by Simon Marshall, student, Onslow College, Wellington, New Zealand.*

Let a, b, and c be positive real numbers. Prove that

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) \ \geq \ 3\left(a^3b + b^3c + c^3a\right)\,.$$

2921. *Proposed by Barry R. Monson, University of New Brunswick, Fredericton, NB; and J. Chris Fisher, University of Regina, Regina, SK.*

These days, with *Cinderella*™ and the *Lénárt sphere*™ at hand, one can do actual spherical constructions, using a spherical ruler to draw the complete great circle through points A and B, and spherical compasses to draw the circle with centre A and radius BC ($\leq \frac{\pi}{2}$, say, on a unit sphere).

Give a simple spherical construction for the vertices of a regular icosahedron inscribed in the sphere.

2922. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Suppose that n is a non-negative integer. Find a closed expression for

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^k \binom{n}{k}\binom{2n-k}{n}.$$

2923. *Proposed by Šefket Arslanagić, University of Sarajevo, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina.*

Suppose that x, $y \geq 0$ (x, $y \in \mathbb{R}$) and $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$. Prove that $x^3 + y^3 \leq 2$.

2924. *Proposed by Todor Mitev, University of Rousse, Rousse, Bulgaria.*

Suppose that x_1, ..., x_n ($n \geq 3$) are positive real numbers satisfying

$$\frac{1}{1+x_2^2x_3\cdots x_n} + \frac{1}{1+x_1x_3^2\cdots x_n} + \cdots + \frac{1}{1+x_1^2x_2\cdots x_{n-1}} \geq \alpha\,, \quad (1)$$

for some $\alpha > 0$. Prove that

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq \frac{n\alpha}{n-\alpha}x_1x_2\cdots x_n\,. \quad (2)$$

2925. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let n be an integer with $n \geq 3$. Determine the zeros of the function

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin(k\pi/n)}{\sin\big((k\pi/n)-x\big)}\,.$$