PROBLEMS

Faire parvenir les propositions de problèmes et les solutions à Jim Totten, Département de mathématiques et de statistique, University College of the Cariboo, Kamloops, BC V2C 5N3. Les propositions de problèmes doivent être accompagnées d'une solution ainsi que de références et d'autres indications qui pourraient être utiles à la rédaction. Si vous envoyez une proposition sans solution, vous devez justifier une solution probable en fournissant suffisamment d'information. Un numéro suivi d'une astérisque ($\star$) *indique que le problème a été proposé sans solution.*

Nous sollicitons en particulier des problèmes originaux. Cependant, d'autres problèmes intéressants pourraient être acceptables s'ils ne sont pas trop connus et si leur provenance est précisée. Normalement, si l'auteur d'un problème est connu, il faut demander sa permission avant de proposer un de ses problèmes.

Pour faciliter l'étude de vos propositions, veuillez taper ou écrire à la main (lisiblement) chaque problème sur une feuille distincte de format $8\frac{1}{2}''\times 11''$ *ou* A4, *la signer et la faire parvenir au rédacteur en chef. Les propositions devront lui parvenir au plus tard le* **1er avril 2004**. *Vous pouvez aussi les faire parvenir par courriel à* **crux-editors@cms.math.ca**. (*Nous apprécierions de recevoir les problèmes et solutions envoyés par courriel au format* LaTeX). *Les fichiers graphiques doivent être de format* « *epic* » *ou* « *eps* » (*encapsulated postscript*). *Les solutions reçues après la date ci-dessus seront prises en compte s'il reste du temps avant la publication. Veuillez prendre note que nous n'acceptons pas les propositions par télécopieur.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais.

Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier et Martin Goldstein, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

2864. *Proposé par Panos E. Tsaoussoglou, Athènes, Grèce.*

Si a, b, c sont les côtés d'un triangle acutangle, montrer que

$$\sum_{\text{cyclique}} \sqrt{a^2+b^2-c^2}\sqrt{a^2-b^2+c^2} \;\le\; ab+bc+ca\,.$$

. . . .

If a, b, c are the sides of an acute angled triangle, prove that

$$\sum_{\text{cyclic}} \sqrt{a^2+b^2-c^2}\sqrt{a^2-b^2+c^2} \;\le\; ab+bc+ca\,.$$

2865. *Proposé par George Baloglou, SUNY Oswego, Oswego, NY, USA.*

Dans un triangle ABC donné, soit D, E et F les points d'intersections respectifs des droites *concourantes* AD, BE et CF avec les côtés d'un triangle donné ABC. Désignons respectivement par p_1 et p_2 les périmètres des triangles ABC et DEF, et par δ_1 et δ_2 leur aires. Montrer que

(a) $2p_2 \leq p_1$ si AD, BE et CF sont les bissectrices ;

(b) $2p_2 \leq p_1$ si AD, BE et CF sont les hauteurs ;

(c) $3p_2 \leq 2p_1$ pour tous les D, E, F si et seulement si le triangle ABC est équilatéral ;

(d) $4\delta_2 \leq \delta_1$ pour tous les D, E, F et quel que soit le triangle ABC.

. . . .

Suppose that D, E, F are the points at which the concurrent lines AD, BE, CF meet the sides of a given triangle ABC. Let p_1 and p_2 be the perimeters and δ_1 and δ_2 the areas of $\triangle ABC$ and $\triangle DEF$, respectively. Prove that

(a) $2p_2 \leq p_1$ if AD, BE, and CF are angle bisectors;

(b) $2p_2 \leq p_1$ if AD, BE, and CF are altitudes;

(c) $3p_2 \leq 2p_1$ for all D, E, F if and only if $\triangle ABC$ is equilateral;

(d) $4\delta_2 \leq \delta_1$ for all D, E, F and arbitrary $\triangle ABC$.

2866. *Proposé par Toshio Seimiya, Kawasaki, Japon.*

Pour deux cercles donnés Γ_1 et Γ_2, soit l et m les tangentes extérieures communes. Soit A et B, C et D les points de contacts respectifs de l et m avec Γ_1 et Γ_2. Désignons par M le point milieu du segment AB, et par P et Q les secondes intersections respectives de MC et MD avec Γ_1 et Γ_2.

Montrer que A, B, P and Q sont sur un même cercle.

. . . .

For two given circles Γ_1 and Γ_2, the lines l and m are external common tangents. The line l touches Γ_1 and Γ_2 at A and B, respectively, and the line m touches Γ_1 and Γ_2 at C and D, respectively. Suppose that M is the mid-point of the segment AB, and that P and Q are the second intersections of MC and MD with Γ_1 and Γ_2, respectively.

Prove that A, B, P, and Q are concyclic.

2867. *Proposé par Antreas P. Hatzipolakis et Paul Yiu, Florida Atlantic University, Boca Raton, FL, USA.*

Etant donné deux points B et C, trouver le lieu du point A tel que le centre du cercle des 9-points du triangle ABC soit situé sur la droite BC.

....

Given two points B and C, find the locus of the point A such that the centre of the nine-point circle of $\triangle ABC$ lies on the line BC.

2868. *Proposé par D.J. Smeenk, Zaltbommel, Pays-Bas.*

Dans le triangle ABC, on a $c^4 = a^4 + b^4$.

(a) Montrer que ABC est un triangle acutangle.

(b) Trouver la fourchette de l'angle ACB.

(c)⋆ Comment peut-on généraliser au cas où $c^n = a^n + b^n$?

....

In $\triangle ABC$, we have $c^4 = a^4 + b^4$.

(a) Show that $\triangle ABC$ is acute angled.

(b) Determine the range of $\angle ACB$.

(c)⋆ How can we generalize to $c^n = a^n + b^n$?

2869. *Proposé par Toshio Seimiya, Kawasaki, Japon.*

On donne un rectangle $ABCD$ d'aire S ; soit E et F situés respectivement sur les côtés AB et AD, de sorte que $[CEF] = \frac{1}{3}S$, où $[PQR]$ désigne l'aire du triangle PQR.

Montrer que l'angle ECF est plus petit ou égal à $\frac{\pi}{6}$.

....

Given rectangle $ABCD$ with area S, let E and F be points on sides AB and AD, respectively, such that $[CEF] = \frac{1}{3}S$, where $[PQR]$ denotes the area of $\triangle PQR$.

Prove that $\angle ECF \leq \frac{\pi}{6}$.

2870. *Proposé par Toshio Seimiya, Kawasaki, Japon.*

Dans un triangle ABC avec I comme centre du cercle inscrit, O comme centre de cercle circonscrit et G comme centre de gravité, on suppose que l'angle AIO est un angle droit. Montrer que IG est parallèle à BC.

....

Given triangle ABC with incentre I, circumcentre O, and centroid G, suppose that $\angle AIO = 90^\circ$. Prove that $IG \| BC$.

2871. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Dans le triangle ABC, désignons les côtés par a, b et c, les symédianes par s_a, s_b et s_c, et le rayon du cercle circonscrit par R. Montrer que

$$\frac{bc}{s_a} + \frac{ca}{s_b} + \frac{ab}{s_c} \leq 6R.$$

. . . .

In $\triangle ABC$, denote the sides by a, b, c, the symmedians by s_a, s_b, s_c, and the circumradius by R. Prove that

$$\frac{bc}{s_a} + \frac{ca}{s_b} + \frac{ab}{s_c} \leq 6R.$$

2872. *Proposé par Toshio Seimiya, Kawasaki, Japon.*

On donne un triangle acutangle ABC d'orthocentre H et soit O le centre du cercle circonscrit ; on suppose que D est un point sur le côté AC avec $CD = 2AD$, que DO coupe BC en E, et que HO est parallèle à BC. Montrer que

(a) $DO = OE$, et (b) $DE = CE$.

. . . .

Given an acute angled triangle ABC with orthocentre H and circumcentre O, suppose that D is a point on the side AC such that $CD = 2AD$, that DO meets BC at E, and that $HO \parallel BC$. Prove that

(a) $DO = OE$, and (b) $DE = CE$.

2873. *Proposé par Kee-Wai Lau, Hong Kong, Chine.*

Trouver tous les nombres entiers positifs n tels que $x = y = z = 1$ soit l'unique solution du système d'équations

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3, \\ x^n + y^n + z^n &= 3. \end{aligned}$$

. . . .

Find all positive integers n such that the system of equations

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3, \\ x^n + y^n + z^n &= 3. \end{aligned}$$

has the unique solution $x = y = z = 1$.

2874. *Proposé par Vedula N. Murty, Dover, PA, USA.*

Désignons par a, b et c les longueurs respectives des côtés BC, CA et AB d'un triangle ABC, et par s, r et R son demi-périmètre, le rayon du cercle inscrit et le rayon du cercle circonscrit. Soit $y = s/R$ et $x = r/R$.

Montrer que

1. $\sum\limits_{\text{cyclique}} \sin^2 A = 2 \iff y - x = 2 \iff \triangle ABC$ est rectangle ;
2. $\sum\limits_{\text{cyclique}} \sin^2 A > 2 \iff y - x > 2 \iff \triangle ABC$ est acutangle ;
3. $\sum\limits_{\text{cyclique}} \sin^2 A < 2 \iff y - x < 2 \iff \triangle ABC$ est obtusangle.

. . . .

Let a, b, and c denote the side lengths BC, CA, and AB, respectively, of triangle ABC, and let s, r, and R denote the semi-perimeter, inradius, and circumradius of the triangle, respectively. Let $y = s/R$ and $x = r/R$.

Show that

1. $\sum\limits_{\text{cyclic}} \sin^2 A = 2 \iff y - x = 2 \iff \triangle ABC$ is right-angled;
2. $\sum\limits_{\text{cyclic}} \sin^2 A > 2 \iff y - x > 2 \iff \triangle ABC$ is acute-angled;
3. $\sum\limits_{\text{cyclic}} \sin^2 A < 2 \iff y - x < 2 \iff \triangle ABC$ is obtuse-angled.

2875. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

On suppose que dans le triangle ABC le cercle inscrit est respectivement tangent aux côtés BC, CA et AB, en D, E et F.

Montrer que $EF^2 + FD^2 + DE^2 \;\leq\; \frac{s^2}{3}$, où s est le demi-périmètre du triangle ABC.

. . . .

Suppose that the incircle of $\triangle ABC$ is tangent to the sides BC, CA, AB, at D, E, F, respectively.

Prove that $EF^2 + FD^2 + DE^2 \;\leq\; \frac{s^2}{3}$, where s is the semiperimeter of $\triangle ABC$.